TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1933

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

SEXTONDE ÅRGÅNGEN

1933

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1933

Sextonde årgångens innehåll.

Sid.

AURELL, BENGT. Bestimmung der Längendifferenz zwischen den astronomisch-geodätischen Zentralen Schwedens und Dänemarks (ref. av gradualavh.) 232

BECKMAN, ANNA. Anm. av Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften 227

BECKMAN, BENGT. Molekylstrålar 129

BECKMAN, NAT. Några iakttagelser om pytagoreiska trianglar 211

BENNER, S. Nobelpris i fysik 1932—1933: P. A. M. Dirac, W. Heisenberg, E. Schrödinger 193

BERGHOLM, C. Kvartslinsmetoden 107

BLOM, C. E. Anm. av Meddel. om Ny materiell från P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, häft. 8 114

BODLUND, CARL. Pells ekvation 10

— — Fotpunktskurvan till en tredjegradskurva 225

EDQVIST, T. Ett närmevärde för π-talet 80

ENSKOG, DAVID. Anm. av O. Klein, Einsteins relativitetsteori i allmäntillgänglig form 231

ENGLUND, BERTIL. Die Reaktion zwischen Diolen und Arsenverbindungen (ref. av gradualavh.) 55

FRIBERG, STEN. Messungen der Refraktion und Dispersion in gasförmigen Kohlenwasserstoffen (ref. av gradualavh.) 186

GERTZ, HANS. Allmän-geometrisk härledning av den optiska avbildningens grundformler 65

GRENANDER, SVEN. Anm. av C. G. A. Arvidson, Praktiska navigeringstabeller 110

GUSTAVER, BROR. Den kemiska nomenklaturen 33

— — Om galvanisk förkromning 96

— — Ett ofarligt försök med nitroglycerin 178

GÖRANSSON, E. Sannolikhetsräkning på empirisk grundval. 8. Förtydliganden 166, 203

HENNICHS, S. Anm. av Lundberg-Olsson-Sefve, Svensk produktion och svensk utrikeshandel 50

HÄLLQVIST, BROR och STARCK, G. Bestämning av luftens syrehalt, utförd som laborationsförsök i realskolan 100

Hössjer, Gustav. Anm. av Jakob Jensen, Praktisk matematik 48
Jenvall, Algot. Anm. av Conrad Lönnqvist, Jordens skapelse och undergång samt Solens öde ... 185
Jönsson, Edvin. Bestämning av konstanten i Joules lag med dopp-värmare och termosflaska ... 106
Kellström, Gunnar. Experimentelle Untersuchungen über Interferenz- und Beugungserscheinungen bei langwelligen Röntgenstrahlen (ref. av gradualavh.) ... 187
Kuylenstierna, Nils. Om beräkning av logaritmer ... 76
Lien, Martin. Anm. av Lennart Elfman, Lärobok i mekanik för tekniska skolor: Statik ... 112
— — Anm. av Lennart Elfman, Elementär hållfasthetslära ... 183
Lundblad, Ragnar. Det hydrostatiska tryckets behandling vid problemlösning å gymnasiet ... 90
Lönnqvist, Conrad. Förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning ... 226
Mebius, C. A. Att bestämma trianglar, vilkas sidor, yta och höjder hava rationella talvärden ... 173, 224
Nydell, Sture. Sfäriska trigonometriens grundformler ... 222
Nyström, Bengt E. Falska rötter och rötter som komma bort ... 1
Persson, P. G. Anm. av H. Timerding, Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie ... 229
Petrini, Henrik. Om sannolikhetsräkning i skolan ... 84
— — Nålproblemet ... 176
Sandén, N. Anm. av Iwan Bolin och Bror Gustaver, Kemien och elektriciteten. Deras samverkan i det praktiska livets tjänst 231
Sievert, Rolf M. Jonisationsmätning enligt kondensatorkammare-metoden ... 145
Sjöstedt, C. E. Anm. av H. Dörrie, Triumph der Mathematik ... 47
Sjöström, Martin. Anm. av Kosmos Bd 10 ... 52
— — Anm. av Arthur March, Moderne Atomphysik ... 110
Svensson, Börje. Kalibrering av termoelement ... 199
Starck, G. Ett försök till massverkans lag ... 37
— — (och B. Hällqvist). Bestämning av luftens syrehalt ... 100
— — Framställning av fosforväte som laborationsförsök ... 177
— — Anm. av Traité de Chimie minérale, E. S. Hedges, Chapters in modern inorganic and theoretical chemistry, I. och W. Noddack, Das Rhenium, samt av H. Alber, Mikrokemi ... 181
Stenström, V. Anm. av Norsk Matematisk Forenings Skrifter ... 179
Tandberg, J. Vad väger 1 kubikdecimeter vatten? ... 19
Thoræus, Robert. A Study of the Ionization Method for Measuring the Intensity and Absorption of X-rays (ref. av gradualavh.) 57

WAHLGREN, AGNE. Om heltalsvärden på sidor och diagonaler i en parallellogram 32
— — Potenssatsen för kägelsnitt 81
WAHLGREN, M. E. Anm. av Molly Hallin och Gurli Sundblad, Planimetriska och stereometriska beräkningsuppgifter 113
WALLENQUIST, ÅKE. Om stjärnornas strålning 157
WALLES, ERIK. Anm. av Georg Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik 109
WETTERBLAD, T. Fysikaliska uppgifter 120
WIGERT, S. En aritmetisk fråga 88

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1932—33 189
Föredrag under hösten 1933 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 226
Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken 1932—33 189
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna v. t. och h. t. 1933 ..... 123, 243
Provräkning i realskolexamen v. t. och h. t. 1933 ..... 127, 247
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 60, 117, 190, 239
— —: Fysikaliska uppgifter (förf. av T. WETTERBLAD) 120
Register till årg. *1—16* av Tidskrift för elem. matem., fysik och kemi 249

Gradualavhandlingar (autoreferat): BENGT AURELL (232), BERTIL ENGLUND (55), STEN FRIBERG (186), GUNNAR KELLSTRÖM (187), ROBERT THORÆUS (57).

Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Era, Industritidningen Norden, The L. M. Ericsson Review, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Höiere Skole (Oslo) 115, 237

Bokanmälningar: DÖRRIE, Triumph der Mathematik; JENSEN, Praktisk Matematik; LUNDBERG-OLSSON-SEFVE, Svensk produktion och svensk utrikeshandel; Kosmos, Fysiska uppsatser 47
JOOS, Lehrbuch der theoretischen Physik; MARCH, Moderne Atomphysik; ARVIDSON, Praktiska navigeringstabeller; ELFMAN, Lärobok i mekanik, Statik; HALLIN-SUNDBLAD, Planimetriska och stereometriska beräkningsuppgifter; Meddelande om ny materiell från P. A. Norstedt & Söner 109

Norsk Matematisk Forenings Skrifter; Traité de Chimie minérale; HEDGES, Chapters in modern and theoretical chemistry; NODDACK, Das Rhenium; ALBER, Mikrokemi; ELFMAN, Elementär hållfasthetslära; LÖNNQVIST, Jordens skapelse och undergång samt Solens öde 179

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften; TIMERDING, Projektive Geometrie; KLEIN, Einsteins realativitetsteori i allmäntillgänglig form; BOLIN-GUSTAVER, Kemien och elektriciteten 237

Insänd litteratur från följande utgivare:

M. Bergwall, A. Bonnier, A/B L. M. Ericsson, P. A. Norstedt & Söner, Svenska Bokförlaget, Tidens förlag, Nautiska Förlaget, Ingenjörsvetenskapsakademien, Statens Meteorologiska anstalt, Kungl. Telegrafverket, Astronomiska Sällskapet, Sveriges Elektricitetsverksförening m. fl. (Era), Industritidningen Norden, Pedagogisk Tidskrift, alla i Stockholm. N. J. Gumpert, Göteborg. Almquist o. Wicksell, Uppsala. Gyldendal Norsk Forlag, Norlis Forlag, Damm o. Søn, Norsk Matematisk Forening, Oslo. Matematisk Forening och Selskabet for Naturlærens Udbredelse, København. Pedagogisk Förening för Finland, Helsingfors. Walter de Gruyter & C:o, Berlin. Johann Ambrosius Barth, Leipzig. F. Hirth, Breslau. F. Deuticke, Leipzig, Wien.

* *
*

Tidskriften utgives av adjunkt C. E. BLOM, professor G. BORELIUS, rektor J. S. HEDSTRÖM och lektor G. STARCK. Redaktörer äro C. E. BLOM och G. STARCK samt för problemavdelningen adjunkt S. BÅGMAN.

Tidskr. utkommer i regel med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 25, per årgång kr. 8: —. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8: — på tidskriftens postgirokonto n:r 52755, varefter häftena sändas per utgivarekorsband. Tidskriften kan även erhållas genom bokhandeln. Samma priser gälla även Danmark, Finland och Norge.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Falska rötter och rötter som komma bort.[1]

Av BENGT E. NYSTRÖM.

1. En gång har jag i en exempelsamling, avsedd för femte klassen, hittat följande ekvation

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}.$$

Som rot angavs i facit $x=1$. Värdet satisfierar ej; denna rot är vad jag tillåtit mig kalla en falsk rot, och exemplet är ur denna synpunkt givetvis olämpligt på detta stadium. Först i ring I kan det löna sig att ge som regel: en nämnare får inte vara $=0$, och — naturligtvis — också att förklara denna regel. Om i en produkt en faktor är $=0$, så blir produkten $=0$. Då en division består i uppsökande av en faktor, då den andra faktorn och produkten äro kända, är det utan vidare klart, att om den kända faktorn är $=0$, produkten icke kan vara ett tal vilket som helst.

2. Man bör i detta sammanhang påpeka nödvändigheten av att använda minsta gemensamma nämnaren vid borttagandet av nämnare. Ekvationen $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}$ får icke behandlas så, att nästa rad blir $x=x^2$. Då kommer den falska roten $x=0$. Man får emellertid ej tro, att blott man använder m. g. n., så är man på den säkra sidan. Det visar ex. 1. Här kan man icke undgå denna falska rot, om man icke överflyttar alla termerna till vänstra ledet och gör lik-

[1] Föredrag för lärarekandidater vid Södermalms högre allm. lärov. våren 1932.

nämnigt. Då erhålles $\frac{2x-2}{x^2-1}=0$ eller efter förkortning $\frac{2}{x+1}=0$. Att ständigt använda en dylik metod, skulle i många fall bli besvärligt; det är enklare att ge som regel: En ekvation, där de obekanta förekomma i en nämnare, måste alltid prövas.

3. När man kommer till trigonometriska ekvationer, får man ofta anledning peka på denna sak. Ett gammalt studentproblem lyder: »Sinus för en vinkel är medelproportional mellan sinus för dubbla och sinus för halva vinkeln. Vilken är vinkeln?»

Man måste här först och främst observera, att medelproportionalen definieras genom en analogi. Alltså ej $\sin 2x = \sqrt{\sin 4x \,.\, \sin x}$, som skulle tillåta värdena $x = n \,.\, 90°$, utan $\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x}{\sin x}$. Förkortar man nu båda leden, får man $\cos 2x = \cos x$ och $x = n \,.\, 120°$. Här har man tre grupper värden — motsvarande tre olika punkter på enhetscirkeln —, som måste prövas var och en för sig. Man måste förkasta $n \,.\, 360°$, och blott $120° + n \,.\, 360°$ och $240° + n \,.\, 360°$ duga.

Regeln: ingen nämnare får ha värdet noll måste ifråga om trigonometriska ekvationer kompletteras med påpekandet, att i $\operatorname{tg} x$ också finns en nämnare — dold. D. v. s. x får icke bli $90° + n \,.\, 180°$, om $\operatorname{tg} x$ finns närvarande i den ursprungliga ekvationen, ty $\operatorname{tg} 90°$ existerar ej. Om t. ex. ekv. $\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} 2x = 0$ löses genom att första termen sättes $= \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, fås $x = n \,.\, 90°$, där blott värdena $n \,.\, 180°$ duga.

4. I första ringens matematikkurs påträffa vi ännu en typ av falska rötter, nämligen i samband med rotekvationer. Ekv. $\sqrt{2x+3} = x$ ger preliminärt rötterna 3 och —1, av vilka den senare måste förkastas med hänsyn till att $\sqrt{a}$

definieras som en positiv storhet. Den falska roten kommer ju fram därför att man kan komma till den ekvation man verkligen löser ($2x + 3 = x^2$), även »från ett annat håll», nämligen från ekv. $\sqrt{2x+3} = -x$. Här ger man väl bara regeln: kvadrerad ekvation måste prövas, men längre fram kan man ha anledning att formulera regeln: försök undvika ekvationer, till vilka man kan komma ur andra situationer än den föreliggande, men går det inte, så pröva resultatet.

5. I samband med kvadratrötter bör kanske påpekas, hur hälsosamt det är att — inte en gång utan många — till eleverna rikta frågan: »Vad är $\sqrt{a^2}$?» (uttalas: positiva roten ur a^2). Det dröjer länge, innan de villigt och förstående ge svaret: »$+a$ eller $-a$, allteftersom a är ett positivt eller negativt tal.» Saken är inte oviktig. Tag t. ex. det gamla studentproblemet: Lös ekv.

$$2\sqrt{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Man erhåller

$$2\sqrt{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

och måste här skilja på de båda fallen

$$2\sqrt{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = +\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$$

och

$$2\sqrt{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos\frac{x}{2}},$$

svarande mot

$$\cos\frac{x}{2} > 0 \qquad \text{och} \qquad \cos\frac{x}{2} < 0$$

$\therefore \frac{x}{2}$ i 1:a eller 4:e kvadranten och $\frac{x}{2}$ i 2:a eller 3:e kvadr.

Vid lösning erhålles

$$\cos^2 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad [\cos x = -\sqrt{2}]$$

$$x = \pm 45° + n \,.\, 360°$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \pm 22°{,}5 + n \,.\, 180°$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad [\cos x = \sqrt{2}]$$

$$x = \pm 225° + n \,.\, 360°$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \pm 112°{,}5 + n \,.\, 180°.$$

Här duga

$$\frac{x}{2} = \pm 22°{,}5 + n \,.\, 360° \quad \text{och} \quad \frac{x}{2} = \pm 112°{,}5 + n \,.\, 360°$$

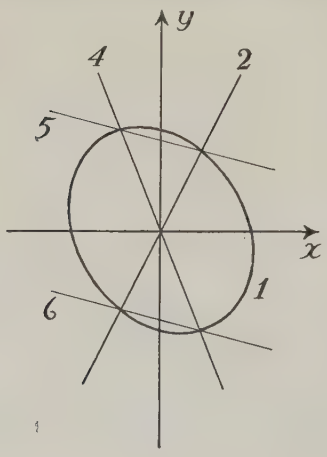
$$\therefore x = \pm 45° + n \,.\, 720° \qquad \therefore x = \pm 225° + n \,.\, 720°.$$

6. Antag, att vi ha ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + xy + 2y^2 &= 12 \\ y &= 2x \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ersättes y i ekv. (1) med $2x$, erhålles efter förenkling $x^2 = 1$ (ekv. 3), som ger $x_1 = +1$ och $x_2 = -1$. Insatta i ekv. (2), ge dessa värden $y_1 = +2$ och $y_2 = -2$. Sker insättningen i stället i ekv. (1), erhålles utom dessa värden även $y = \pm 2{,}5$.

Att det är bekvämast att sätta in x-värdena i ekv. (2), är ju klart, men varför är det fel att sätta in dem i (1), som ju också gäller? Helt enkelt därför, att man kan komma till (3) ur (1) även genom kombination med andra ekvationer än (2), nämligen ur



$$y = -\frac{5x}{2} \qquad (4)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \qquad (5)$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} \qquad (6).$$

Vidstående figur klarlägger saken.

Resultatet blir regeln, att man vid lösning av ekv.-system bör insätta ett funnet värde i substitutionsekvationen.

7. En yngling hade fått $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ och ville, för att få värdet noggrannare, beräkna $\operatorname{tg} x$ med tillhjälp av formeln $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Han fick $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$ och $x=36°,87+$ $+n\,.\,180°$. Ekv. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ ger emellertid $x=36°,86+n\,.\,360°$. Noggrannare värde hade han fått, men han hade också fått falska rötter. Varifrån komma de? Orsaken kan anges så, att den använda formeln är en andragradsekvation med avseende på $\operatorname{tg}\alpha$. Rötternas produkt i denna ekvation är -1, och ynglingen ifråga hade fått $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, även om han utgått från $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-3$. Han får då också med rötterna till denna ekvation. Ett nytt exempel alltså på vådan av att hamna i en ekvation, dit man kan komma från flera håll. För denna formel, använd på detta sätt, måste läraren ge en bestämd varning. Använd den gärna, men pröva!

Formlerna för $\cos 2\alpha$ och $\sin 2\alpha$ visa samma farliga karaktär. Giv t. ex. uppgiften: Bestäm utan tabell alla vinklar x, som satisfiera ekv. $\sin x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Man får $\cos 2x=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x=\pm 22°,5+n\,.\,180°$, av vilka värden de i 3:e och 4:e kvadranterna måste kasseras. De motsvara ekv. $\sin x=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, och behovet av prövning föreligger väl tämligen klart.

Lömskare ligger saken till, om man har uppgiften: Lös det reella systemet

$$\left.\begin{aligned}\sin x&=y^2\\ \sin^2\frac{x}{2}&=\frac{1+y^2}{2}\end{aligned}\right\}$$

och man får idén att eliminera x genom att använda formeln för sin 2α. Man får

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1-y^2}{2} \text{ och } \sin x = 2\sqrt{\frac{1+y^2}{2}\cdot\frac{1-y^2}{2}}=y^2,$$

varav

$$y^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

där minustecknet förkastas, och därmed tror man kanske, att all rättfärdighet är uppfylld. Man får $x = 45^\circ + n\,.\,360^\circ$ och $x = 135^\circ + n\,.\,360^\circ$. Men prövning visar, att $45^\circ + n\,.\,360^\circ$ inte duger, vilket till en början förefaller ytterst besynnerligt. Roten kommer ur systemet: $\sin x = y^2$; $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+y^2}{2}$. Ty har man $\sin a = a$ och $\cos a = b$, får man samma värde på sin 2α från tre andra håll, dels från $\sin a = -a$ och $\cos a = -b$, dels från $\sin a = \pm b$ och $\cos a = \pm a$ (där samma tecken väljas för båda).

Påpekas bör, att även om man löser systemet genom elimination av y^2, får man rötter, som ej duga. Man får då $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1+\sin x}{2}$; $\because \cos x = -\sin x$; $\operatorname{tg} x = -1$ och $x = 135^\circ + n\,.\,180^\circ$, d. v. s. oriktig period. Att man här får med flera rötter än som passa det givna systemet, är ju uppenbart, ty vid elimination av y^2 elimineras också villkoret $\sin x > 0$. Ekv. $\cos x = -\sin x$ tillåter ju både positiva och negativa värden på $\sin x$.

8. Antag, att vi ha ekv. $\sin x\,.\,\operatorname{tg} 2x = \cos x$ och välja metoden att gå över till $\operatorname{tg} x$. Vi få då $\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=1$, varav $x = \pm 30^\circ + n\,.\,180^\circ$. Men rotgruppen $x = 90^\circ + n\,.\,180^\circ$, som tydligen också satisfierar, har kommit bort. På vad sätt? Jo, dels måste påpekas, att liksom $x = n\,.\,90^\circ$ måste kasseras, om den ursprungliga ekvationen innehåller $\operatorname{tg} x$, så kan en slutekvation med $\operatorname{tg} x$ som obekant aldrig ge $x = n\,.\,90^\circ$, även om värdet satisfierar den ursprungliga ekvatio-

nen. Rotsystemet skulle ha kommit fram, om $\operatorname{tg} 2x$ i stället ersatts med $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ och $\sin 2x$ uppdelats. Men vari ligger själva felet? Tydligen däri att formeln $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ icke gäller för $\alpha = 90^\circ$, varför den möjligheten måste undersökas, innan formeln användes. Eller — om man så vill — man får inte dividera med $\cos x$, innan man undersökt möjligheten $\cos x = 0$.

9. Låt oss ställa upp ekvationen $\sin x + 2 \cos x + 2 = 0$ och ge den att lösa åt en yngling, som fattat kärlek till de avskyvärda formlerna

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ och } \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Han får nu som enda rot $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$, och gruppen $x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ har kommit bort. Orsaken är densamma som i föreg. exempel, formlerna gälla ej, då $\frac{x}{2} = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, och möjligheten $x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ måste prövas, innan formeln användes. Formler äro farliga saker.

10. Vi ha systemet

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xz &= 3 \\ (x - 1)z &= y - 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3). \end{aligned}$$

Vi dividera (2) och (3) och insätta $y = 3 - x$ i den så erhållna ekvationen. Vi få då $\frac{x}{x-1} = \frac{3}{1-x}$. Skall man nu, då man tar bort nämnarna, sätta $x - 1 = 0$ som en möjlighet, eller skall man tänka: En nämnare får inte vara $= 0$? Saken brukar vara rätt oklar för en hel del elever och måste av läraren redas ut. I detta fall är $x = 1$ givetvis en rot;

$x - 1$ fanns icke som nämnare i en ursprunglig ekvation. Vi ha själva givit den nämnareplats. Märk alltså olikheten mellan de tre ekvationerna

$$\frac{x^2-1}{x-1}=1,\quad \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1} \text{ och } x^2-1=x-1.$$

I den sista är $x=1$ en rot, i de två första icke.

11. Systemet

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{x}{2} &= y \qquad (1)\\ (1-y)\sin x &= \left(y-\frac{2}{3}\right)\cos x \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

kan lösas t. ex. så: Ur (2) erhålles

$$\operatorname{tg} x=\frac{y-\frac{2}{3}}{1-y}.$$

Så använda vi formeln för tg 2α och få

$$\frac{y-\frac{2}{3}}{1-y}=\frac{2y}{1-y^2}.$$

Denna ekv. ger, om m. g. n. användes vid nämnarnas borttagande, $y=2$ och $y=-\frac{1}{3}$. Skola nu dessa värden insättas i (1) eller i (2)? Jo, givetvis i (1), som är substitutionsekvationen, icke i (2), som skulle ge värdena $x=-53^\circ{,}12+n\,.\,180^\circ$ och $x=-36^\circ{,}86+n\,.\,180^\circ$, varav blott de i 2:a och 4:e kvadranterna satisfiera.

Men vidare ha vi tappat ett rotpar $y=1$, $x=90^\circ+n\,.\,180^\circ$. Ty vi ha dividerat med cos x och med $1-y$ utan att undersöka möjligheten $y=1$, cos $x=0$.

12. Om man får till uppgift att bestämma blott en av de obekanta i ett ekvationssystem, får man ändå inte nonchalera de övriga. Vi ha t. ex. uppgiften:

Bestäm x ur systemet

$$\left.\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin x + 2\sin^2 y + 2\sin y &= 5 \\ \sin y &= 2\sin x \end{aligned}\right\}.$$

Såsom värden på sin x finner man $\frac{1}{2}$ och -1. De duga emellertid ej båda, ty av motsvarande värden på sin y, 1 och -2, måste det senare kasseras, och motsvarande x-värde får man då också avstå ifrån.

13. Till sist ett litet felresonemang, som jag påträffade häromdagen och som roade mig. En elev skulle lösa ekv. $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$. Han ersatte vänstra ledet med $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$ och fick alltså dels $\sin x + \cos x = 0$, dels $\sin x + \cos x = 1$. Det sista värdet satte han in i högra ledet av den ursprungliga ekv. och fick då $\sin 2x = 0$, $x = n \,.\, 90$. Men blott $n \,.\, 360°$ och $90° + n \,.\, 360°$ duga, icke $180° + n \,.\, 360°$ eller $270° + n \,.\, 360°$. Varifrån ha de kommit? Genom insättningen sätter han faktiskt $(\sin x + \cos x)^2 = 1$, vars ena hälft [$\sin x + \cos x = -1$] icke gäller. Man får helt enkelt icke insätta ett erhållet värde i en ursprunglig ekv., om man blott gör det delvis.

Har man $3x^2 - 4x + 1 = 0$ och vet, att $x = 1$, får man inte sätta in värdet i enbart andra termen i hopp att på det sättet få den andra roten. Man får då $x = \pm 1$, av vilka den ena roten är falsk. Och den sökta roten får man inte alls. Men båda ekvationerna äro ju sanna? Javäl, men den givna innehåller hela sanningen, den andra blott en del. Och sedan delen blivit utkastad ur det stora sammanhanget, får den själv reda upp sitt eget problem.

Pells ekvation.

Av CARL BODLUND.

Ett sätt att lösa Pells ekvation

$$x^2 - ay^2 = 1 \qquad (1)$$

består ju däri, att man utvecklar $\sqrt{a}$ i ett periodiskt kedjebråk och därefter uträknar vissa närmevärden av bråket. vilkas täljare och nämnare utgöra heltalsvärden, som satisfiera ekvationen. Denna metod leder ofelbart till målet, men den är ofta tidsödande. Den metod, som jag här nedan vill demonstrera, ger för vissa värden på a lösningen mycket lätt. För andra a-värden kan även denna metod kräva avsevärd möda.

Om man kan till Pells ekvation finna en homolog ekvation av formen

$$u^2 + \varrho\, uv + v^2 = 1, \qquad (2)$$

så är Pells ekvation så gott som omedelbart löst. De minsta heltalsrötterna till denna ekvation äro $u = 1$, $v = 0$. De övriga rötterna givas av nämnarna och täljarna i närmevärdena av kedjebråket

$$-\cfrac{1}{\varrho - \cfrac{1}{\varrho - \ldots}}$$

eller kortare $(-\varrho, -\varrho, -\varrho, \ldots)$. Ty om ekvationen $u^2 + \varrho\, uv + v^2 = 1$ har rötterna u_1 och v_1, så har den också rötterna $\varrho u_1 + v_1$ och $-u_1$. Dessa tal, insatta i ekvationen, giva nämligen $(\varrho u_1 + v_1)^2 - \varrho u_1 (\varrho u_1 + v_1) + u_1^2 = 1$ eller efter hyfsning $u_1^2 + \varrho u_1 v_1 + v_1^2 = 1$. Nu satisfieras

ekvationen tydligen av talen 1 och 0, alltså finnas även rötterna ϱ och -1, därefter rötterna ϱ^2-1 och $-\varrho$, sedan $\varrho(\varrho^2-1)-\varrho$ och $-(\varrho^2-1)$ eller $\varrho^3-2\varrho$ och $-\varrho^2+1$ o. s. v., vilka tal ju tydligen som nämnts erhållas ur angivna kedjebråk.

Rötternas värden brukar jag skaffa mig medelst följande uppställning:

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \varrho \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \varrho \\ -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \varrho^2-1 \\ -\varrho \end{matrix} \right| \begin{matrix} \varrho^3-2\varrho \\ -\varrho^2+1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \varrho^4-3\varrho^2+1 \\ -\varrho^3+2\varrho \end{matrix} \right| \ldots$$

Så t. ex. finner man rötterna till ekvationen $u^2+4uv+v^2=1$ vara

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = 4 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 15 \\ -4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 56 \\ -15 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 209 \\ -56 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 780 \\ -209 \end{matrix} \left| \ldots \right.$$

För att finna den homologa trinomekvationen till ekvationen $x^2-ay^2=1$ sätter jag

$$a=(c+b)(c-b)=c^2-b^2;$$
$$x=ct+z \text{ och } y=t. \qquad (3)$$

Insättas sistnämnda uttryck för x och y i Pells ekvation, fås

$$b^2t^2+2ctz+z^2=1 \text{ eller}$$
$$b^2t^2+\frac{2c}{b}\cdot btz+z^2=1.$$

Detta är den homologa trinomekvationen, i det att $bt=u$, $z=v$ och $\frac{2c}{b}=\varrho$. Varje rotsystem till denna ekvation ger ett rotsystem till Pells ekvation enligt (3).

För att rötterna skola bli hela tal, kräves emellertid, att ϱ eller $\frac{2c}{b}$ är helt tal, d. v. s. att man så uppdelar a i faktorerna $c+b$ och $c-b$, att ϱ blir helt tal. Däri ligger svårigheten i denna metod.

Men först de enkla fallen.

I.

Koefficienten a kan uppdelas i två heltalsfaktorer, vilkas skillnad är 1, 2 eller 4. Då är $b = 0{,}5$, 1 eller 2 och alltså $\varrho = 4c$, $2c$ eller c.

A. $b = 0{,}5$.

$$\left.\begin{matrix} 0{,}5\,t \\ z \end{matrix}\right\} = \begin{Vmatrix} 1 & 4c & 16c^2 - 1 \\ 0 & -1 & -4c \end{Vmatrix} \ldots .$$

$$x_1 = ct_1 + z_1 = c \,.\, 2 + 0 = 2c = 2\sqrt{a + 0{,}25}\,.$$

$$y_1 = t_1 = 2; \quad x_2 = 8c^2 - 1; \quad y_2 = 8c \text{ o. s. v.}$$

Ex. $x^2 - 12y^2 = 1$.

$$12 = 4 \,.\, 3; \quad b = 0{,}5; \quad c = 3{,}5; \quad \varrho = 14.$$

$$x_1 = 7; \quad y_1 = 2.$$

B. $b = 1$.

$$\left.\begin{matrix} t \\ z \end{matrix}\right\} = 2c \begin{Vmatrix} 1 & 2c & 4c^2 - 1 \\ 0 & -1 & -2c \end{Vmatrix} \ldots .$$

$$x_1 = c \,.\, 1 + 0 = c = \sqrt{a + 1}; \quad y_1 = 1.$$

Ex. $x^2 - 15y^2 = 1$.

$$15 = 5 \,.\, 3; \quad b = 1; \quad c = 4; \quad \varrho = 8.$$

$$x_1 = 4; \quad y_1 = 1.$$

C. $b = 2$.

$$\left.\begin{matrix} 2t \\ z \end{matrix}\right\} = c \begin{Vmatrix} 1 & c & c^2 - 1 \\ 0 & -1 & -c \end{Vmatrix} \ldots .$$

I detta fall äro de tre första värdena på t resp. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\,c$ och $\frac{1}{2}\,(c^2 - 1)$. Värdet $t = \frac{1}{2}$ duger ej, om man vill ha heltalsvärden på x och y. Värdet $t = \frac{1}{2}\,c$ duger, om c är jämnt tal, hoc est om a är jämnt tal. Då är $x_1 = 0{,}5\,c^2 - 1 = 0{,}5\,(a + 2)$

och $y_1 = 0{,}5\, c = 0{,}5 \sqrt{a+4}$. Om a och c äro udda tal, är först det tredje värdet $t = 0{,}5\ (c^2 - 1)$ brukbart. Det ger $x_1 = 0{,}5\, c\ (c^2 - 1) - c = 0{,}5\ (c^2 - 3) = 0{,}5\ (a+1) \sqrt{a+4}$, $y_1 = 0{,}5\ (c^2 - 1) = 0{,}5\ (a+3)$.

Ex. $x^2 - 12y^2 = 1$.

$$12 = 6 \,.\, 2; \quad x_1 = 7; \quad y_1 = 2.$$

Ex. $x^2 - 21y^2 = 1$.

$$21 = 7 \,.\, 3; \quad x^1 = 55; \quad y_1 = 12.$$

D. Om a låter uppdela sig i två faktorer, av vilka den ena är ett kvadrattal och den andra ett tal av i A, B eller C behandlat slag, kan man vid uppsättandet av trinomekvationen bortse från kvadratfaktorn och förfara, som följande exempel visar:

Ex. $x^2 - 294y^2 = 1$.

$294 = 49 \,.\, 6$. För $a = 6 = 3 \,.\, 2$ är $b = 0{,}5$, $c = 2{,}5$ och $\varrho = 10$, alltså

$$\left.\begin{matrix} 0{,}5\, t \\ z \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 10 \\ \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 10 \\ -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 99 \\ -10 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 980 \\ -99 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 9701 \\ -980 \end{matrix} \right| \ldots .$$

Här måste jag nu medtaga endast sådana t-värden, som äro delbara med 7. Det första är $t = 2 \,.\, 980$, alltså $x_1 = 2{,}5 \,.\, 2 \,.\, 980 - 99 = 4801$; $y_1 = \frac{1}{7} \,.\, 2 \,.\, 980 = 280$.

II.

Koefficienten a skiljer sig från ett kvadrattal med en, två eller fyra enheter.

E. Skillnaden är 1. Om a är en enhet mindre än kvadrattalet, återkomma vi till fallet B. Om $a = n^2 + 1$, delas a upp i faktorerna $\dfrac{n^2+1}{n}$ och $\dfrac{n^2}{n}$, varvid $b = \dfrac{1}{2n}$ och $c = \dfrac{2n^2+1}{2n}$ samt $\varrho = 4n^2 + 2$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2n}\,t \\ z \end{matrix}\right\} = 4n^2+2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4n^2+2 \\ -1 \end{matrix} \Bigg| \ldots .$$

Alltså är $t_1 = 2n$, $t_2 = 2n\ (4n^2+2)$ o. s. v.

$$x_1 = \frac{2n^2+1}{2n} \cdot 2n + 0 = 2n^2+1; \quad y_1 = 2n$$

eller

$$x_1 = 2a-1; \quad y_1 = 2\sqrt{a-1}.$$

Ex. $x^2 - 50y^2 = 1.$

$$x_1 = 99; \quad y_1 = 14.$$

F. Skillnaden är 2, $a = n^2 \pm 2 = \frac{n^2 \pm 2}{n} \cdot \frac{n^2}{n}$, $b = \frac{1}{n}$, $c = \frac{n^2 \pm 1}{n}$, $\varrho = 2(n^2 \pm 1)$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{n}\,t \\ z \end{matrix}\right\} = 2(n^2 \pm 1) \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2n^2 \pm 2 \\ -1 \end{matrix} \Bigg| \ldots .$$

$t_1 = n; \quad x_1 = n^2 \pm 1 = a \mp 1; \quad y_1 = n = \sqrt{a \mp 2}.$

Ex. $x^2 - 51y^2 = 1.$

$$x_1 = 50; \quad y_1 = 7.$$

Ex. $x^2 - 47y^2 = 1.$

$$x_1 = 48; \quad y_1 = 7.$$

G. Skillnaden är 4. Om $a = n^2 - 4$, återkomma vi till fallet *C*. Om $a = n^2 + 4$, sättas $a = \frac{n^2+4}{n} \cdot \frac{n^2}{n}$, $b = \frac{2}{n}$, $c = \frac{n^2+2}{n}$, $\varrho = n^2+2$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{n}\,t \\ z \end{matrix}\right\} = n^2+2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} n^2+2 \\ -1 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} (n^2+2)^2-1 \\ -(n^2+2) \end{matrix} \Bigg| \ldots .$$

$$y = t = 0{,}5\,n; \quad 0{,}5\,n(n^2+2); \quad 0{,}5\,n[(n^2+2)^2-1] \ldots$$

$$x = ct + z = 0{,}5\,(n^2+2); \quad 0{,}5\,(n^2+2)^2 - 1;$$

$$0{,}5\,(n^2+2)\,[(n^2+2)^2-1] - (n^2+2); \ \ldots .$$

Om a och således även n och ϱ äro jämna tal, kan första t-värdet användas. I så fall är därför $x_1 = 0{,}5\,(n^2+2)$; $y_1 = 0{,}5\,n$, d. v. s. $x_1 = 0{,}5\,(a-2)$, $y_1 = 0{,}5\sqrt{a-4}$.

Ex. $x^2 - 40y^2 = 1$.

$$x_1 = 19; \quad y_1 = 3.$$

Om däremot a, n och ϱ äro udda tal, duger först det tredje t-värdet. Man har då $x_1 = 0{,}5\,(n^2+2)\,[(n^2+2)^2-1] - (n^2+2)$; $y_1 = 0{,}5\,[(n^2+2)^2-1]$, d. v. s.

$$x_1 = 0{,}5\,(a-2)\,[(a-2)^2-3]; \quad y_1 = 0{,}5[(a-2)^2-1]\sqrt{a-4}.$$

Ex. $x^2 - 85y^2 = 1$.

$$x_1 = 285769; \quad y_1 = 30996.$$

H. Om a låter uppdela sig i två faktorer, av vilka den ena är ett kvardrattal och den andra ett tal av det slag, som behandlats i E, F och G, kan man förfara som i D.

Ex. $x^2 - 539y^2 = 1$.

$539 = 49 \cdot 11$; för $a = 11 = 9 + 2$ är $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}^0$, $\varrho = 20$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{3}\,t \\ z \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 20 \\ \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 20 \\ -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 399 \\ -20 \end{matrix} \right| \ldots .$$

$t_3 = 3 \cdot 399$ är delbart med 7. Vid användning av detta t-värde får man

$$x_1 = \frac{1}{3}^0 \cdot 3 \cdot 399 - 20 = 3970; \quad y_1 = \tfrac{1}{7} \cdot 3 \cdot 399 = 171.$$

I förbigående vill jag nämna, att om ekvationen

$$x^2 - ay^2 = -1$$

har heltalsrötterna x_0 och y_0, så har ekvationen

$$x^2 - ay^2 = 1$$

rötterna $x_1 = 2x_0^2 + 1$ och $y_1 = 2x_0y_0$. Förutnämnda ekvation är lösbar bl. a. för de fall, då $a = n^2 + 1$ och $a = n^2 + 4$ (se C och G). Är $a = n^2 + 1$, så är $y = 1$.

Ex. $x^2 - 50y = -1$.

$$y_0 = 1; \quad x_0 = 7.$$

$$x_1 = 2 \cdot 7^2 + 1 = 99; \quad y_1 = 2 \cdot 7 \cdot 1 = 14.$$

Är $a = n^2 + 4$, så är $y = 0{,}5\ (a - 3)$, om a är udda tal.

Ex. $x^2 - 85y^2 = -1$.

$$y_0 = 41; \ x_0 = 378.$$

$$x_1 = 2 \cdot 378^2 + 1 = 285769; \quad y_1 = 2 \cdot 378 \cdot 41 = 30996.$$

III.

Koefficienten a har annat talvärde (än i I och II).

Lösandet av Pells ekvation är nu ej längre så bekvämt. Detta har sin orsak i svårigheten att finna den lämpliga homologa trinomekvationen med dess heltalskoefficient ϱ. Jag har — åtminstone hittills — inte lyckats finna på något annat sätt än följande:

Jag sätter

$$a = \alpha^2 + \beta = \frac{ap}{\alpha p + q} \cdot \frac{\alpha p + q}{p} = \frac{ap^2}{p(\alpha p + q)} \cdot \frac{(\alpha p + q)^2}{p(\alpha p + q)}. \quad (5)$$

Talet b är halva skillnaden mellan dessa två faktorer. Om b:s täljare betecknas med $\frac{1}{2}\varepsilon$, är alltså

$$ap^2 - (\alpha p + q)^2 = \varepsilon.$$

Om denna ekvation löses med avseende på p, fås

$$p = \frac{1}{\beta}\left(\alpha q \pm \sqrt{aq^2 + \beta\varepsilon}\right) \quad (6)$$

$$(\varepsilon = \pm 1, \pm 2, \pm 4).$$

I (6) äro alla ingående storheter utom a variabla. Dock äro α och β beroende av varandra och kunna för övrigt lämpligen ej ges mer än två olika värdepar, ibland tre eller fyra. Även ε har ett begränsat område. Det är således q,

som är den egentliga variabeln, och arbetet består i att genom försök finna ett sådant värde på q, att p blir ett helt tal. Det sätt, på vilket jag söker q, torde framgå av följande exempel:

$$x^2 - 74y^2 = 1.$$

Här är $a = 74$, som kan uppdelas i bl. a. $8^2 + 10$ eller $9^2 - 7$. Jag uppskriver

$$p = \tfrac{1}{10}\left(8q \pm \sqrt{74q^2 + 10\varepsilon}\right); \quad 10,\ 20,\ 40;$$
$$p = -\tfrac{1}{7}\left(9q \pm \sqrt{74q^2 - 7\varepsilon}\right); \quad 7,\ 14,\ 28.$$

För $q = 3$ och $\varepsilon = 1$ får jag i det övre uttrycket för p, att $p = \frac{1}{10}(24 + 26) = 5$. Alltså är $ap + q = 8 \cdot 5 + 3 = 43$, och

$$p = \frac{74 \cdot 5^2 \cdot 43^2}{5^2 \cdot 43^2} = \frac{1850 \cdot 1849}{N^2}.$$

$$b = \frac{1}{2N}; \qquad c = \frac{3699}{2N}; \qquad \varrho = 7398; \qquad t_1 = 2N.$$

$$x_1 = ct + 0 = 3699; \qquad y_1 = t = 430.$$

I detta exempel fann jag så gott som omedelbart ett lämpligt värde på q. Om man bortser från vissa värden på a, till vilka bl. a. höra de flesta tal av formen $n^2 + n \pm 1$, ger metoden ofta resultat med jämförelsevis små q-värden. Om a är ett tal, som är mindre än 100, är det i själva verket endast för 7 a-värden, som man nödgas giva q ett större värde än 5, nämligen för $a = 57$ $(q = 9)$, 70 $(q = 11)$, 73, 89, 91, 94 och 97.

För att ytterligare belysa metoden, väljer jag ekvationen

$$x^2 - 109y^2 = 1.$$

$$109 = 10^2 + 9; \qquad q = 11\ (\varepsilon = 4); \qquad p = 25.$$

$$109 = \frac{109 \cdot 25^2 \cdot 261^2}{25^2 \cdot 261^2} = \frac{68125 \cdot 68121}{6525^2}.$$

$$b = \frac{2}{N}; \qquad c = \frac{68123}{N}; \qquad \varrho = 68123.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{N}\,t \\ z \end{matrix}\right\} = 68123 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 68123 \\ -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 4640\,743128 \\ -68123 \end{matrix} \right| \ldots .$$

Eftersom b har faktorn 2 och c är udda tal, passar först det tredje värdet på t, som är helt tal:

$$x_1 = ct + z = 158\,070671\,986249.$$
$$y_1 = t = 15\,040424\,455100.$$

En närmare granskning av (6) ger vid handen, att metoden snabbt ger resultat för vissa slags talvärden på a. De i styckena I och II behandlade värdena äro i själva verket specialfall av värdena $a = (mn)^2 \pm n$, $a = (mn)^2 \pm 2n$ och $a = (mn)^2 \pm 4n$. Varje intresserad läsare finner genom att på dessa a-tal tillämpa metoden i III, att lösandet av Pells ekvation blir lätt. Som värden på q kan man nämligen taga resp. talen 1, 1 och 2. De resp. värdena på p bli då $\pm 2m$, $\pm m$ och $\pm m$. Man kan finna andra fall, då metoden är bekväm.[1]

Slutligen anför jag några ytterligare exempel med angivande av blott resultaten och under påpekande av, att varje exempel för lösningen krävt en tid av 10 à 20 minuter.

1. $x^2 - 931y^2 = 1$; $x_1 = 6681\,448801$; $y_1 = 218\,975640$.
2. $x^2 - 1001910y^2 = 1$; $x_1 = 9689\,848881$; $y_1 = 968924$.
3. $x^2 - 78\,978773y^2 = 1$.
   $x_1 = 246320\,818116\,163498\,635849$;
   $y_1 = 27\,716981\,194837\,100140$.

[1] Exempel härpå: övriga värden på koefficienten, då $q = 1$, äro $a = (3n \pm 1)^2 + 2n \pm 1$ och $a = (5n + 2)^2 + 2n + 1$; samt då $q = 2$, $a = (5n + 1)^2 + 4n + 1$; $n \gtrless 0$.

Vad väger 1 kubikdecimeter vatten?

En studie i metrologi.

Av **J. TANDBERG.**

> — — — Dock hwad är det oß ſå mycket angelägit, at weta hwad alla kroppar och materier wäga uti et luft-tomt rum, emedan wij ändå intet kunna betiena oß af them der utinnan, utan i luften, och det är nog at wij weta hwad the ther uti wäga?
>
> (Daniel Menlös, Kort Beskrifning af den Hydrostatiske Wåg-Balcken, Stockholm 1728, sid. 8.)

I Atén gick fordom en man omkring och ställde enkla frågor till sina medmänniskor. Svaren framkallade nya frågor, och ganska snart hade den tillfrågade drivits från den ena positionen till den andra tills han medgav, att han intet med säkerhet visste. Det har av flera skäl sina allvarliga vådor att söka träda i den vise mannens fotspår, men icke desto mindre har förf. till dessa rader vågat göra om experimentet i mycket liten skala, nämligen så till vida, att han frågat sina vänner:[1] »Vad väger 1 dm^3 vatten?» Som första svar på den enkla frågan har han nästan alltid fått: »Ett kilo», i några fall med tillägget att det fanns en viss obetydlig korrektion. Korrektionen har i förekommande fall hänförts till: skillnaden mellan 1 liter och 1 dm^3; tyngdkraftens olika

[1] Samtliga här avsedda försökspersoner, ett 30-tal, ha studerat fysik och avlagt antingen civilingenjörs-, fil. kand.- eller högre examina.

storlek på skilda platser; luftens upptryck; vattnets värmeutvidgning; och eventuellt till en kombination av de två senare orsakerna. Frågan har i nästa steg preciserats att gälla en praktisk vägning av 1 dm^3 vatten på en balansvåg med mässingsvikter i luft vid rumstemp., t. ex. 20°. De flesta tillfrågade ha då strax uppgivit, att luftens upptryck spelar in, i några fall har även vattnets värmeutvidgning beaktats, och det har uppskattningsvis föreslagits en total korrektion från 1 mg upp till 15 gram. Meningarna ha emellertid varit ungefär jämnt fördelade mellan huruvida korrektionen skulle läggas till eller dragas från kilogramvikten. Stundom har största avseendet fästs vid vattnets kemiska beskaffenhet, huruvida det var vanligt kranvatten eller destillerat vatten och i senare fallet huruvida vattnet var lufthaltigt eller urkokt. På frågan hur stor viktsskillnaden mellan 1 dm^3 vanligt kranvatten och 1 dm^3 dest. vatten (av samma temp.) uppskattades till (en fråga, som blott framställts till ett fåtal, högt kvalificerade personer), erhöllos visserligen svävande svar, men ansågs dock skillnaden uppgå till c:a 1 à 2 gram.

Förutom de ovan nämnda personerna har förf. även rådfrågat metrologisk litteratur. De rent fysikaliskt specialiserade författarna äro alltid väl underrättade beträffande de avsedda spörsmålen, medan de mera historiskt orienterade ibland basera noggranna beräkningar på antagandet, att 1 dm^3 vatten väger 1 kg. Särskilt i äldre tid, under antiken, medeltiden och fram emot slutet av 1600-talet, tog man icke någon hänsyn till luftens upptryck, vattnets värmeutvidgning o. dyl., varför det nu givetvis icke är fullt korrekt att vid kalkyler över äldre mått begagna en relation, som innebär en så långt gående idealisering av försöksbetingelserna som fordras för likställandet av 1 dm^3 vatten med 1 kg.

Ett enda exempel må anföras. Den lärde och samvetsgranne Hultsch beaktar ofta vid sina jämförelser möjliga temperaturvaritioner hos själva vattnet, t. ex. mellan + 4° och + 19°C, men han tänker ej på att luftens upptryck

kan spela honom ett litet spratt, då han utan vidare använder metersystemets relationer. När han[1] utgår från ett romerskt pund = 327,453 g och beräknar att 80 romerska pund dest. vatten av 4° har volymen 26,196 liter, baserar han denna beräkning på det enkla antagandet, att 1 liter dest. vatten av 4° väger 1 kg. Hade HULTSCH verkligen med mässingsvikter (mässingens sp. v. 8,4, luftens temp. + 4°, tryck 760 mm) vägt upp 26,196 kg dest. vatten av 4° och sedan uppmätt volymen, skulle han ha funnit denna vara 26,226 liter, alltså 30 cm^3 mera än han beräknat. Skillnaden orsakas av luftens upptryck, som gör, att en vattenmassa, som väger 1 kg, vägd med mässingsvikter i luft, får en något större volym än 1 liter, även om vattnet är vid dess största täthet.

Vi skola i det följande betrakta några för den praktiska metrologien viktiga fall och börja med att besvara den ursprungliga frågan om hur mycket 1 dm^3 vatten väger. Först och främst böra vi beakta den visserligen praktiskt oftast betydelselösa men teoretiskt viktiga skillnaden mellan 1 l och 1 dm^3. Om det varit möjligt att tillverka arkivkilogrammet exakt enligt definitionen, skulle givetvis litern och kubikdecimetern även kunnat bli identiska. Men så har icke varit möjligt, och därför har man som bekant låtit arkivkilogrammet i Paris definiera kilogrammet och arkivmetern definiera metern. Därav kommer det sig, att litern numera definieras såsom den volym, som massan 1 kg rent vatten vid temp. för dess största täthet intager under normaltryck.[2] Experimentella undersökningar ha visat, att en sålunda definierad liter har volymen 1 dm^3 + 27 mm^3 (med ett fel av högst ± 2 mm^3).

Beakta vi vattnets kompressibilitet[3] och tänka oss det vara möjligt att införa denna liter vatten av »temp. för dess

[1] F. HULTSCH, Griechische und römische Metrologie, Berlin 1882, sid. 126, not 1.

[2] Normaltryck råder vid 760 mm Hg av 0°, när tyngdkraftens acceleration är 980,665 cm sek^{-2}.

[3] Kompressionskoefficienten är $52 \cdot 10^{-6}$ per atm. vid 4°.

största täthet» i ett lufttomt [1] rum, skulle 1 atm. tryckminskning föranleda en volymökning av icke mindre än 52 mm^3, varför det vid första påseendet kanske något egendomliga påståendet kan göras, att 1 kg rent vatten skulle vid 4° och i lufttomt rum intaga en volym av 1 dm^3 och 79 mm^3 eller att 1 *dm^3 rent vatten av 4° i lufttomt rum väger 999,921 gram.*

Vilja vi vara riktigt exakta vid literns bestämning, böra vi även beakta kärlets geometriska form. Vattnet i en långhalsad mätkolv står i genomsnitt under högre tryck än vattnet i ett kubiskt kärl. Volymskillnaden på grund av den olika kompressionen kan beräknas uppgå till c:a 0,7 mm^3, en praktiskt obetydlig kvantitet, som dock borde beaktas i en noggrann definition.

Vi återvända emellertid till en vägning i luft med mässingsvikter och låta den ske t. ex. vid 20° C. Vid denna temp. är vattnets täthet 0,998230 i förhållande till vatten av 4°, varför 1 liter sådant vatten har massan 998,230 g och 1 dm^3 följaktligen 998,203 g, d. v. s. vattnet skulle väga så mycket i »lufttomt rum». Någon för metrologiskt ändamål avsedd vägning av vatten i »lufttomt rum» har veterligen aldrig utförts, och det skulle näppeligen vara av allvarligt intresse att en sådan vägning försöktes. Vägningen sker i luft. Både vikterna och vattenmassan förlora i vikt lika mycket som den undanträngda luftmassan väger, och den senare storheten [2] är beroende av temperatur, barometertryck och luftens fuktighet. Om mässingens sp. v. är 8,4, blir den resterande volymen $= 1 - \frac{1}{8{,}4} = 0{,}881$ dm^3 och, om vi antaga 760 mm tryck (vid normaltyngd) och torr luft av 20°, väger

[1] Vattnets ångtryck vid 4° är 6,1 mm Hg, vilket naturligtvis ej hindrar oss att beräkna ett idealiserat fall. Det må även påpekas att läget av vattnets täthetsmaximum är en funktion av trycket och att det går upp 0°,022 C på temp.-skalan för 1 atm trycksänkning.

[2] Betr. noggranna bestämningar se vidare K. Scheel, Grundlagen der praktischen Metronomie (1911); numeriska värden på korrektionerna finnas uträknade i Landolt-Börnsteins tabeller och i *International Critical Tables*, vol. I.

1 dm^3 luft 1,2014 g, varför upptrycket blir 0,881 . 1,2044 = 1,0611 g. Vi kunna för praktiskt bruk lämpligen pruta av på nog-

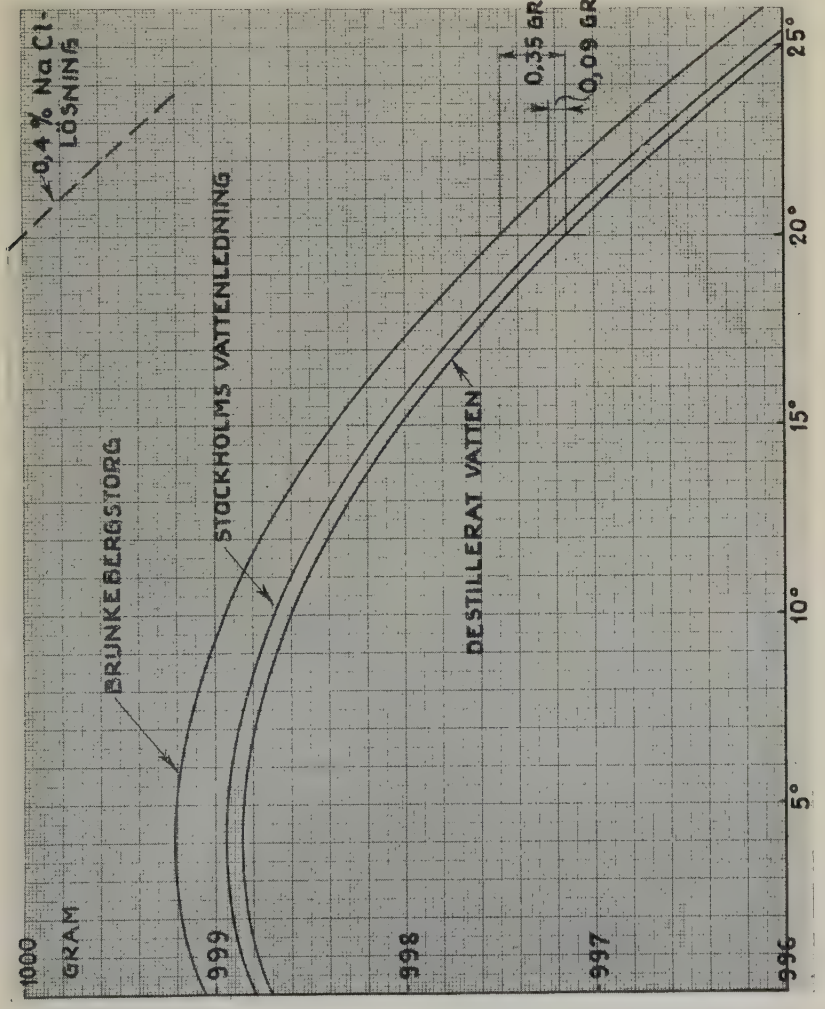


Fig. 1. Vikten av 1 dm^3 vatten vid olika temp. Vägningen utförd med mässingsvikter i torr luft av samma temp. som vattnet och 760 mm tryck.

grannheten och nöja oss med att antaga, att inflytandet av luftens upptryck på vägningeen av 1 dm^3 av ämnet är 1,06 g vid rumstemp., vilket värde inom måttliga variationer

av luftfuktighet, tryck, temp. och sp. v. på mässing icke ändras med mera än ett fåtal enheter i sista decimalen.

Vår korrektion för luftens upptryck sänker alltså vikten med c:a 1,06 g och på uppsatsrubrikens fråga kunna vi giva svaret: *1 dm³ rent vatten väger med mässingsvikter i torr luft vid 20° och normalt barometertryck 997,14 g.*

Huru detta belopp ändras med temp. framgår av nedersta kurvan fig. 1. Huru själva korrektionen varierar med barometertryck, luftfuktighet och temp. framgår av kurvorna fig. 2, som beräknats för olika barometerstånd, direkt avlästa å en barometer med (vid 0° riktig) mässingsskala, av luftens temp. och vid c:a 60° latitud.

*

Nu komma vi till den intressanta frågan om vad »vanligt vatten» väger. Frågan har sin metrologiska betydelse bl. a. därigenom att GEORG STIERNHIELM, som (tyvärr förgäves) försökte genomföra en genial reform av mått- och viktsystemet i Sverige på 1650-talet, ville sammanbinda längdmåttet med vikten och härvid utgick från vad han kallade »färskt watn» som normalsubstans. STIERNHIELM beaktade emellertid varken luftens upptryck, temperaturvariationer, lufthalt i vattnet el. dyl., något som ännu ej hade aktualitet för den tidens fysik.

Först må vi betrakta den inverkan, som den i vatten lösta luften har på vattnets täthet. Undersökningar[1] på dest. vatten ha visat, att inverkan är mycket obetydlig. Lufthaltigt vatten är vid temp. under + 21°C lättare än luftfritt, vid högre temp. omvänt. Skillnaden är störst vid 7° à 8°, då 1 dm³ lufthaltigt vatten är 3,4 mg lättare; vid 0° och 14° är det 2,5 mg, vid 20° 0,1 mg lättare och vid 21° är skillnaden icke säkert påvisbar.

Gå vi till naturliga vatten, inverka givetvis de däri lösta salterna. För att få ett begrepp om vad roll dessa kunna spela, har förf. utfört direkta täthetsbestämningar dels på

[1] MAREK, Annalen der Physik **44**, 171, (1891).

Stockholms vattenledningsvatten, dels på vatten från den gamla brunnen på Brunkebergstorg i Stockholm. Det är

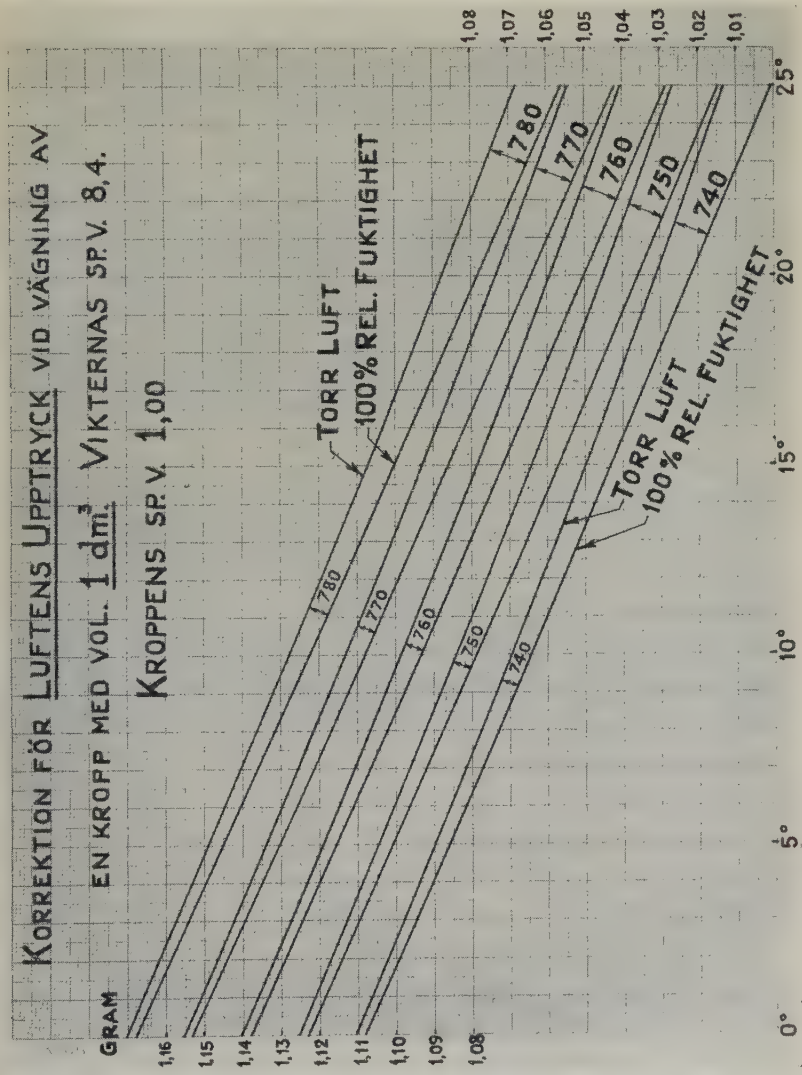


Fig. 2. Korrektion för luftens uppfryck vid vägning av 1 dm^3 vatten.

sannolikt att detta senare vatten bör ungefär motsvara vad STIERNHIELM menar med »färskt watn». Dessutom har ke-

misk analys[1] utförts på båda vattnen. Täthetsbestämningarna ha utförts med hjälp av pyknometer med graderat, kapillärt stigrör vid omkr. 20° under iakttagande av nödiga försiktighetsmått och korrektioner. Resultatet är att Stockholms vattenledningsvatten vid tillfället hade tätheten 1,00009 och Brunkebergsvattnet tätheten 1,00035 i förhållande till urkokt dest. vatten av samma temp. Vikten av dylika vatten per dm^3 framgår av kurvorna fig. 1, som visa, att den i intetdera fallet stiger upp till 1 kg.

Man kan då fråga sig: Finnes det något vatten, som verkligen väger 1 kg/dm^3 i luft? Svaret blir nekande, om man håller sig till sötvatten. Det visar sig nämligen, att man måste använda en 0,4 % koksaltlösning för att vid 20° få en vikt av 1 kg/dm^3 i luft.

*

Vi återvända nu till GEORG STIERNHIELM och hans kalkyler. Förf. har tidigare[2] haft tillfälle att noggrant uppmäta det exemplar av hans »Carl-Staf», som förvaras på Fysiska Institutionen i Lund (fig. 3). Staven upptager bl. a. kantlängderna på kuber, som rymma vissa på mitten av 1600-talet gängse svenska mått. Man observerar sålunda en serie

[1]

Kemisk analys av vattenprov, tappade d. 19/8 1932.		Stockholms vattenledning	Brunkebergstorg
Total hårdhet	tyska grader	2.8	5.6
Kloridhalt	mg Cl/lit	11	43
Sulfathalt	mg SO_4/lit	15	39
Fri CO_2 (titrerat med $\frac{1}{25}$ *n* Na OH, fenolftalein)	mg CO_2/lit	9	20
Hydrokarbonatjon (titrerat med 0.1 *n* HCl, metylorange)	mg ekv. HCO_3/lit	0.95	3.6
Glödrest	mg/lit	76	299
Vattnets temp. vid tappningen		—	9°.0
Luftens » » »		—	22°.5

[2] J. TANDBERG, Historiska instrument i Lund. Kosmos (Sv. fysikersamfundets årsbok) 1922, sid. 197—211.

mått för våta varor, »Öhl Tonna, Öhl Fierding, Öhl Otting, Kanna, Stop, Quarter, Quartula, Sextula, Octula, Sked», en serie för torra varor, »Måhltonna, Spann, Halfspann, Fierding, Kappa», en serie mått baserade på decimalsystem »Amphoræ, Kanna, Römer, Kosa, Bäker, Motle», däribland även kantlängden för 8 Amphoræ (1 aln). Dessutom finnes det märkliga längdmåttet »Linea Carolina» angivet och en

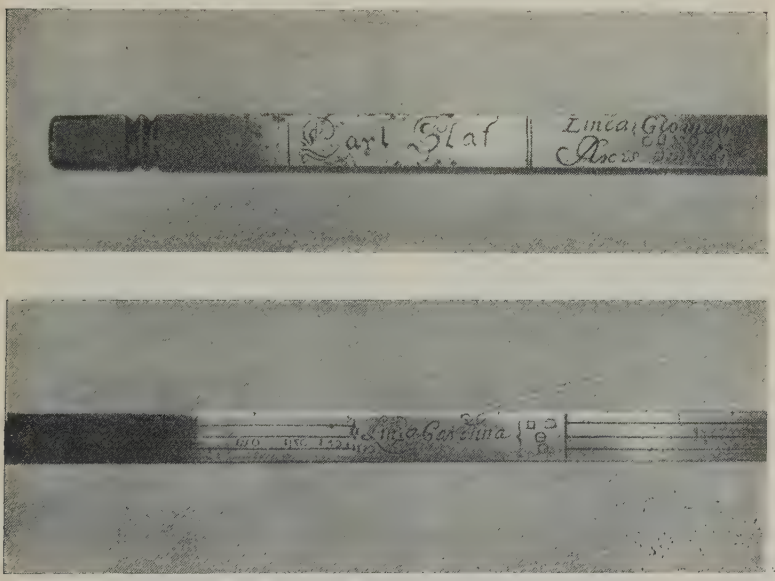


Fig. 3. Detaljer från Stiernhielms »Carl-Staf», som bl. a. upptager längdmått, hörande till det av honom föreslagna måttsystemet, där mått och vikt sammanbundos över vattnet såsom normalsubstans och all indelning skedde efter decimalsystem.

serie avledningar därav med geometrisk betydelse. »Linea Carolina» har (vid 0°) längden 36,167 cm och definieras av S. såsom kantlängden hos en kub, som rymmer 1 miljon ass vatten. (En mera bekvämt reproducerbar definition gav S. senare, då han bestämde att $\frac{1}{10}$ av hela *L.-C.* skulle vara kantlängd i en kub, som rymmer 1000 ass vatten.) Asset uppgives vanligen i mått- och viktstabeller väga 48,012 mg.[1]

[1] Detta är $\frac{1}{8818}$ av det svenska skålpund, som vägde 425,076 g.

Men detta värde *stämmer icke* med det, som låter sig beräknas ur längdangivelserna på Carlstaven i Lund och som blir något (c:a 1,5 %) lägre. När förf. (1921) utförde de nämnda uppmätningarna och märkte att en skillnad förelåg, antog han att den berodde på bristande noggrannhet vid stavens tillverkning på 1600-talet. Så kan ej enbart ha varit fallet. Som i det följande skall visas, låter sig skillnaden spåras till en ändring av själva den normalvikt (ass), som lagligen bestämde de praktiska viktsenheterna i Sverige.

Med stöd av de uppmätta längderna är det lätt att beräkna varje angivet målkärls volym och därmed även vikten i luft av en lika stor volym vatten. Vi kunna antaga de extrema temp.-gränserna 4° och 20°C och att mässingsstavens längdangivelser skola gälla vid någon temp. inom dessa gränser. Vi kunna som tyngsta vatten välja Brunkebergsvatten av 4°, vägande 999,2 g/dm^3, och som lättaste destillerat vatten av 20°, vägande 997,1 g/dm^3. Vi känna STIERNHIELMS uppgifter[1] om hur många ass varje vattenvolym väger. Därmed kunna vi instänga vikten av S:s ass mellan två gränser.

På S:s mätstav finnes den svenska foten upptagen på 17 ställen, uppmätningen har givit längden 29,675 ± 0,001 cm vid 0°C, och S. låter 1 kubikfot vatten väga 55300 ass, varav beräknas 47,255 mm^3/ass. Vätskemåtten »Öhltonna» t. o. m. »Sked» giva som vägt medium av 10 bestämningar värdet 47,259 mm^3/ass. Spannmålsmåtten »Måhltonna» t. o. m. »Kappa» giva 47,428 mm^3/ass. »8 Amphoræ» t. o. m. »Motle» giva 47,247 mm^3/ass. Linea Carolina slutligen 47,308 mm^3/ass. Medeltalet av dessa 5 värden blir 47,299 ± 0,034 mm^3/ass.[2] Med iakttagande av här tidigare nämnda omständigheter låter sig beräknas, att det STIERNHIELMSKA asset[3] med största sannolikhet varit *större än 47,15 mg* men *mindre än 47,35 mg* eller lika med 47,25 ± 0,10 mg.[4]

[1] Avtryckta i Kosmos (1922) sid. 206.

[2] Vid 0° hos mässingsskalan; linjära utvidgningskoeff. antages vara 0,000018.

[3] Från tidsperioden 1657—1664.

[4] E. TORSLOW, Attungen och öreslandet XIII, sid. 9 (1927) beräknar

Därmed torde vi även i huvudsak kunna förklara de avvikande värden, som Lantmäteridirektören J. NORDENCREUTZ år 1736 erhöll, då han kontrollerade STIERNHIELMS uppgifter. Han fann, att »icke allt friskt vatten väger lika mycket» och att 1 kubiktum friskt vatten vägde 545 ass och ej 553. Skillnaden *kan* nu förklaras därmed, att de båda herrarna begagnat olika tunga ass-vikter.[1] Om vi (med NORDENCREUTZ) väga upp 545 ass à 48,042 mg, få vi nämligen samma vikt som om vi väga upp 553 ass à 47,347 mg,

Fig. 4. Målkärl av tenn, rymmande 1 kanna (2,63 liter), sett från två sidor. Kärlet är dedicerat till Riksdrotset Per Brahe »Comiti de Wisingsöö etc.», signerat »G. Stiernhielm 1664».

alltså inom de sannolika gränserna fullt rimligt. Emellertid finnes ingen anledning till något antagande, att de fysikaliska betingelserna skulle ha varit lika vid dessa olika bestämningar av vattnets vikt.

Att STIERNHIELM själv utfört experimentella bestämningar icke blott av »naturlig» (specifik) vikt utan även av sambandet mellan »måhl» (volym) och motsvarande ass-

det Stiernhielmska asset till 47,324 mg enligt en annan metod men i överensstämmelse med föreliggande resultat.

[1] S. höjde skålpundet (1666?) med 1 qvintin, d. v. s. $\frac{1}{128}$, vilket regeringen godkände enl. resolution av $^{27}/_{4}$ 1667.

vikt vatten, är säkert. Han nämner själv i samband med Linea Carolina, att han lät tillverka (jfr fig. 4 o. 5) några »nett afpassade cubicmått» av tenn, vilkas innehåll av friskt vatten »iag nett och noga afwogh i gran och ass in till thess iag efther myckit omak och många Experimenter opfann then Linean». Några direkta anteckningar från experimenten har jag dock ej lyckats finna bland S:s bevarade manuskript.[1] Han använder sig emellertid även (och ibland

Fig. 5. Mindre målkärl av tenn, signerade G. Stiernhielm 1664; samtliga tillhöriga Fysiska Institutionen i Lund.

mycket kritiskt) av uppgifter och tankar, som stamma från samtida författare[2] på området.

Den svenska viktualie- och metallviktens enheter blevo

[1] H. J. Heyman har utgivit en refererande förteckning över »S:s skrifter om mått o. vikt» i »Uppsala Univ.-biblioteks minnesskrift 1621—1921», sid. 317—328.

[2] Bl. a. hänvisar S. till J. B. Villalpandus, In Ezechielem explanationes et apparatus urbis . . , Rom 1604, och J. Greaves, Discourse of the Roman foot and denarius, London 1647. Även Snellius och Stevin märkas bland dem som S. studerat.

år 1667 lagligen definierade på basis av det holländska eller troiska asset. Detta kanske kan förklaras av de förbindelser med Holland, som knötos på Gustav II Adolfs tid. Asset ansågs även vara en över allt lika stor, internationellt känd viktsenhet. År 1737 tillsattes en kommission, som skulle granska den då gällande förordningen om mått, mål och vikt. I det redan samma år avgivna betänkandet omtalas, att man genom de utländska ministrarna anskaffat troiska assvikter från olika länder och jämfört dem, men *man hade funnit dem icke stämma överens.* Med anledning av denna oroande upptäckt yttrade senare Prof. C. BERCH i en »Academisk afhandling om Svenska Vigterne» (Uppsala 1782) följande:

»Det bör således ej komma någon underligt före, at finna, det Svenska Assen, som man lika med utlänningarne tilförene kallat Troisk, icke stämmer med den utländska Assen närmare öfverens, än dessa utländske stämma öfverens inbördes. Måttet på tyngder är i sig sjelft indifferent, allenast et vist träffas och bibehålles.»

Den sista satsen gäller alltjämt och vi förlita oss ju numera på arkivkilogram och prototyper, något som icke hindrar att allt kunde blivit minst lika praktiskt, om STIERNHIELM hade fått genomföra sina förslag av år 1657. Hans system är i princip lika bra som metersystemet och hade liksom detta kunnat gå en mognande utveckling till mötes.

Om heltalsvärden på sidor och diagonaler i en parallellogram.

Av AGNE WAHLGREN.

I sista häftet för 1932 (sid. 200) ger professor MEBIUS heltalslösningar till ekvationen

$$2a^2 + 2b^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Hans i ekv. (11) angivna lösning kan erhållas direkt, om man sätter

$$x = m + n\,,\quad y = m - n\,,$$

vilket är tillåtet, eftersom x och y måste vara båda jämna eller båda udda. Då erhålles:

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2. \qquad (2)$$

Allteftersom a och b äro a) båda jämna, b) båda udda, c) ett jämnt och ett udda, blir detta fallet även med m och n, eftersom membra i (2) få formerna $4p$, $4p + 2$, $4p + 1$ resp. Genom eventuellt ombyte av a och b kan man därför alltid åstadkomma, att m och a (liksom n och b) bli båda jämna eller båda udda. Lätt inses, att m är det största av de fyra talen. Då erhålles:

$$m^2 - a^2 = b^2 - n^2; \qquad (3)$$

$$m + a = 2\alpha;\quad m - a = 2\beta;\quad b + n = 2\gamma;\quad b - n = 2\delta;$$
$$\alpha\beta = \gamma\delta. \qquad (4).$$

Då bli m och n det största och minsta, a och b de båda återstående av talen $\alpha \pm \beta$, $\gamma \pm \delta$ (den största av faktorerna väljes till α). Detta är den i ekv. (11) angivna lösningen.

Om man tar hänsyn till likheten (4), inses lätt, att i fallet a) äro alla eller ingen, i fallet b) två och i fallet c)

tre av faktorerna α, β, γ, δ jämna. Fallet a) uteslutes, eftersom de sökta talen då ha en gemensam faktor 2. Man får således alla heltalslösningar till (1) utan gemensam faktor men inga andra, om man vid uppdelningen i faktorer utgår från ett *jämnt* tal T och väljer faktorer utan gemensam faktor. Ty gemensamma udda faktorer till a, b, x, y bli även gemensamma för α, β, γ, δ och tvärtom. I fallet b) kunna a och b byta plats i ekv. (3). Mot varje parallellogram svara således två system α, β, γ, δ; i det ena av dessa är α större, i det andra mindre än $\beta + \gamma + \delta$. För romben erhålles naturligtvis endast ett värdesystem, i vilket $\alpha = \beta + \gamma + \delta$. I fallet c) äro α, β, γ, δ entydigt bestämda för en given parallellogram.

Den kemiska nomenklaturen.

Av **BROR GUSTAVER.**

De kemiska föreningarnas namn och formler sätta stora fordringar på nybörjaren; deras inlärande blir lätt ett minnesplugg, bl. a. därför att det ofta är svårt att av en kemisk förenings namn sluta sig till dess formel. Varje uppslag, som syftar till en förenkling och rationalisering av den kemiska namngivningen och en minskning av den rena minnesläsningen, bör mottagas med tacksamhet.

Man känner för närvarande betydligt mer än $^1/_4$ million olika kemiska föreningar, varav cirka 90 % äro kolföreningar (organiska). Till all lycka äga endast ett jämförelsevis ringa antal större betydelse för industri, teknik och det dagliga livet. Men även det ringa antal ämnen — och det är i alla fall en hel del — som måste förekomma i läroböckerna, erbjuda så pass mycket minnesplugg, att det är högeligen önskvärt att detta kan lindras.

På den organiska kemiens område kan näppeligen någon reform vara att vänta. Föreningarnas namn äro i allmän-

het hopställda av namnen på de radikaler, som ingå i föreningen, och dels är denna radikallära mycket konsekvent, dels brukar man på ett elementärt stadium icke tränga så djupt in i den organiska kemiens mysterier. Tyvärr har emellertid ett stort antal av de i tekniken och det dagliga livet använda kolföreningarna utom sitt vetenskapliga namn ännu ett eller stundom flera andra tekniska namn. Häråt är emellertid inte mycket att göra, och kanske är denna omständighet en av orsakerna till att den organiska kemien hitintills haft en betydligt blygsammare ställning i gymnasiets kemikurs än som motsvarar ämnets ofantligt stora vikt och betydelse.

Så ha vi de oorganiska föreningarna. Deras nomenklatur är behäftad med många brister, och det vore synnerligen välbehövligt ur pedagogisk synpunkt, om de värsta inkonsekvenserna kunde försvinna. Vi skola taga ett par exempel.

Järnets syreföreningar benämnas vanligen järnoxidul, järnoxidoxidul och järnoxid. Deras formler äro resp. FeO, Fe_3O_4 eller $FeO \cdot Fe_2O_3$ och Fe_2O_3. I oxidulen är järnet 2-värt, i oxiden 3-värt och i den tredje oxiden både 2- och 3-värt. Järnets klorföreningar kallas järnklorur eller ferroklorid, $FeCl_2$, i vilken järnet är 2-värt, och järnklorid eller ferriklorid, $FeCl_3$, med 3-värt järn. För att från namnet kunna sluta sig till formeln, måste alltså nybörjaren lära in, att järnets atomvärde i dessa föreningar är 2 och 3 och att ferrum är namnet på järn. Ändelsen *i* i namnet »ferri» betecknar den högre valensen och ändelsen *o* i namnet »ferro» den lägre, vilket gäller generellt. Likaså betecknar *oxid* den syreförening, där järnet har den högre valensen, *oxidul* den med den lägre. Detta är däremot ej alltid fallet, såsom framgår av följande exempel.

Blyets vanliga oxider äro PbO, Pb_3O_4 och PbO_2. De benämnas blyoxid, mönja och blydioxid (plumbioxid, blysuperoxid). (En oxid Pb_2O eller blysuboxid anses vara en blandning av blyoxid och bly.) Här benämnes således syreföreningen med den lägre valensen *oxid* och ej oxidul, metallen

är i den 2-värd. Mönjan saknar ett namn, som erinrar om att den är en syreförening, bly är i mönja 2- och 4-värt. I enlighet därmed skrives formeln stundom $2PbO \cdot PbO_2$. Oxiden med 4-värt bly kallas vanligen bly*di*oxid, vilket namn anger, att 2 syreatomer äro förenade med 1 blyatom, således ytterligare en princip för namnbildningen. Efter blyets latinska namn plumbum benämnas blyföreningar med resp. 2-värt och 4-värt bly för plumb*o*- resp. plumb*i*-föreningar. Sålunda skulle klorföreningarna kunna benämnas plumboklorid, $PbCl_2$, och plumbiklorid, $PbCl_4$. Under det att järnets atomvärde var resp. 2 och 3, är blyets atomvärde resp. 2 och 4. De vanliga namnen på blyets klorföreningar äro emellertid blyklorid, $PbCl_2$, och bly*tetra*klorid, $PbCl_4$. Denna senare beteckning syftar på, att 4 kloratomer äro förenade med 1 blyatom. Något samband med blyets *atomvärde* har tydligen ej användningen av de latinska räkneorden i namnen på de nämnda blyföreningarna (blydioxid, blytetraklorid).

Liknande besvärliga och inkonsekventa benämningar erbjuda andra metaller med växlande atomvärde. Metalloiderna, som äro ämnen med stor rikedom på föreningstyper, visa oss exempel på nomenklatur, som även lider brist på konsekvens, och sambandet mellan benämningar och formler är ej alltid så lätt att hålla reda på. I fosforns syre- och klorföreningar syfta namnen på fosforns atomvärde, detta är i fosfor*tri*oxid och fosfor*tri*klorid = 3, i fosfor*penta*oxid och fosfor*penta*klorid = 5. Men i andra fall gäller ej denna regel. Så är t. ex. fallet för kol och kisel. I kol*mono*xid är kolet 2-värt, i kol*di*oxid 4-värt, i kisel*di*oxid är kisel 4-värt. Här syfta alltså namnen på antalet syreatomer i formeln (CO, CO_2 och SiO_2). På samma sätt är det för kväve*di*oxid, NO_2, i vilken förening kväve är 4-värt liksom i kväve*tetra*oxiden N_2O_4. I kväve*penta*oxid, N_2O_5, står namnet i samklang med att kväveatomen är 5-värd, liksom att det ingår 5 syreatomer i formeln. Man skulle då kunna vänta sig, att föreningen N_2O_3 benämnes kväve*tri*oxid, men den kallas

i stället kväve*sesqvi*oxid (sesqvi = en och en halv). Däremot kallas föreningen P_2O_3 för fosfor*tri*oxid.

De andragna exemplen hoppas jag äro tillräckliga för att visa, att den kemiska nomenklaturen lämnar en hel del övrigt att önska i pedagogiskt avseende. Det är då glädjande, att i den kemiska läroboklitteraturen (Hofmann, Lehrbuch der anorganischen Chemie) lancerats ett nytt beteckningssätt, enligt vilket efter grundämnets namn, inom parentes sättes en siffra, som anger *grundämnets atomvärde*. Några exempel klargöra bäst saken.

järn(2)oxid FeO	fosfor(3)klorid PCl_3
järn(3)oxid Fe_2O_3	fosfor(5)klorid PCl_5
järn(2,3)oxid $FeO \cdot Fe_2O_3$	kol(2)oxid CO
järn(2)klorid $FeCl_2$	kol(4)oxid CO_2
järn(3)klorid $FeCl_3$	kväve(2)oxid NO
bly(2)oxid PbO	kväve(3)oxid N_2O_3
bly(4)oxid PbO_2	kväve(4)oxid NO_2 och $(NO_2)_2$
bly(2,4)oxid $2PbO \cdot PbO_2$	kväve(5)oxid N_2O_5
bly(2)klorid $PbCl_2$	järn(2)sulfat $FeSO_4$
bly(4)klorid $PbCl_4$	krom(3)sulfat $Cr_2(SO_4)_3$
fosfor(3)oxid P_2O_3	kvicksilver(1)nitrat $HgNO_3$
fosfor(5)oxid P_2O_5	kvicksilver(2)nitrat $Hg(NO_3)_2$

Detta beteckningssätt, som säkerligen har framtiden för sig, innebär en obestridlig förenkling av nomenklaturen och har därför stort pedagogiskt värde. Man slipper att minnas dels svenska, dels latinska namn på samma metall. Namnet kommer vidare att göra formelskrivningen lättare, då molekylens sammansättning ju är klar, när atomvärdet är angivet i namnet. Härigenom kan en hel del onyttigt och överflödigt minnesplugg undvikas till båtnad för andra, viktigare delar av ämnet.

Ett försök till massverkans lag.

Av G. STARCK.

Försök, som illustrera massverkans lag, finnas i stort antal, men äro i de allra flesta fall rent kvalitativa och belysa i regeln de jämviktsförskjutningar, som en ökning eller en minskning av någon komponents koncentration medför. Hit höra alla de kvalitativa försök, som stå i samband med salters löslighetsprodukt, deras utfällning och upplösning, elektrolyters ledningsförmåga, hydrolys m. m.

I det fåtal försök, där kvantitativa resultat erhållas, gäller det likaledes verifikation av någon av lagens följdsatser. Hit hör demonstrationen av den konstanta sönderdelningsspänningen av t. ex. kalciumkarbonat eller bättre natriumbikarbonat. Man torde emellertid medgiva, att ett konstant dissociationstryck av natriumbikarbonat knappast kan anses som en demonstration av massverkans lag. Systemet är heterogent och univariant, och satsen om gasfasens konstanta tryck är ett ur massverkans lag härlett korollarium, vars härledning förutsätter en rad fiktiva processer, nämligen de fasta fasernas förgasning och deras återbildning ur gasfasen. Som kvantitativt belägg för massverkans lag är detta försök otillfredsställande just därför att vi icke kunna variera komponenternas koncentrationer. Ställningen kan sammanfattas så, att för närvarande massverkans lag postuleras under hänvisning till någon jämvikt, t. ex. dissociationen av salmiakånga, dock utan några som hälst kvantitativa belägg, varefter i fortsättningen mötande

jämvikter betraktas ur lagens synpunkt, dock endast kvalitativt.

Om nu åt massverkans lag skall givas en kvantitativ formulering, så är det önskvärt, att åtminstone ett försök utföres, som leder fram därtill, helt enkelt därför, att ingen formel blir levande och åskådlig, förrän eleverna varit med om att uppmäta de ingående storheterna och räkna med dem. I detta fall koncentrationerna, storheter, som för närvarande knappt äro mer än tomma ord.

Ett kvantitativt försök till massverkans lag måste gälla ett homogent system med variabla koncentrationer av komponenterna, en homogen gasjämvikt eller en jämvikt i lösning. Gasjämvikterna äro formellt sett mycket enkla, men i det experimentella utförandet desto svårare. Ett undantag gives likväl, nämligen jämvikten mellan kvävedioxid och kvävetetroxid:

$$2\,NO_2 \rightleftarrows N_2O_4, \qquad (1)$$

och förf. har också under lång tid gjort sporadiska försök att utnyttja den för demonstrationsändamål. Fördelarna med denna reaktion äro:

1. Lämpliga jämviktslägen falla inom ett bekvämt tillgängligt temperaturintervall, 25—100°.

2. Reaktionen är förbunden med en minskning av den molekylära koncentrationen, varför jämviktsblandningen, en viss temperatur förutsatt, kan analyseras genom att man bestämmer samhöriga värden av systemets vikt, volym och tryck. Genom att hålla en av dessa parametrar konstant och variera den ena av de återstående (vid oförändrad temperatur) erhålles en serie värden på den andra återstående, vilka böra stå i det förhållande till varandra, som massverkans lag fordrar.

Olägenheter äro:

3. Svårigheten att framställa ren kvävedioxid och att handskas därmed, framför allt att väga upp substansen.

4. Svårigheten att finna en vätska för gasens avspärrning och för manometern; kvicksilver angripes omedelbart.

Olägenheterna bortfalla emellertid fullständigt, om man framställer kvävedioxiden i reaktionskärlet självt, nämligen av kväveoxid och syre enl. formeln

$$2\,NO + O_2 = 2\,NO_2, \qquad (2)$$

vilken reaktion vid ifrågavarande temperatur är fullständig. Efter att ha utnyttjat detta konstbegrepp är förf. därför nu i tillfälle att beskriva en metod för verklig härledning eller om man så vill demonstration av massverkans lag, som visserligen kräver en specialbyggd, dock ganska enkel apparat, med vars hjälp ett halvt dussin olika jämviktslägen (vid konstant temperatur) kan fixeras på mindre tid än 15 min.

Principen för försöket är följande. Två gasbyretter, som kunna hållas vid en bestämd temperatur, fyllas den ena med NO, den andra med syre, båda gaserna fullt torra och av den yttre luftens tryck. Syrgasbyretten, vars volym är konstant, kan intermittent förbindas med en kvicksilvermanometer. En viss volym NO pressas med kvicksilver över i syrgasen, varpå dennas tryck avläses. Man pressar in en ny portion NO, avläser det nya trycket o. s. v. så länge kväveoxiden räcker.

Vad vi skola beräkna, är trycken av NO_2 och av N_2O_4 i syrgasbyretten. Antag:

Reaktionskärlets volym ..... V cc
Barometerstånd ..... B mm
Volymen införd NO (av B mm) ..... v cc
Manometeravläsning (övertryck) ..... p mm.

Enligt reaktionsformeln (2) är volymen av bildad NO_2 vid B mm, om ingen association inträder .. v cc och minskningen av syrevolymen (B mm) ..... $\frac{v}{2}$ cc.

I verkligheten är volymen oförändrad $= V$ cc och därför beräknat tryck av NO_2 (ingen association) .... $\frac{v}{V} \cdot B$ mm

tryck av syreresten ..... $B - \frac{v}{2V} \cdot B$ mm.

Antag, att av 1 g-mol. NO_2 x st. associeras till N_2O_4. Då är enl. formel (1)

trycket av NO_2 ..... $(1-x)\cdot\frac{v}{V}\cdot B$ mm (3)

» » N_2O_4 ..... $\frac{x}{2}\cdot\frac{v}{V}\cdot B$ mm. (4)

Totala trycket är således ..... $B-\frac{v}{2V}\cdot B$ (syre)

$+(1-x)\cdot\frac{v}{V}\cdot B$ (NO_2)

$+\frac{x}{2}\cdot\frac{v}{V}\cdot B$ (N_2O_4).

Men totala trycket är..... $B+p$ mm.

Således är

$$B-\frac{v}{2V}\cdot B+(1-x)\frac{v}{V}\cdot B+\frac{x}{2}\ \frac{v}{V}\cdot B=B+p,$$

vilket ger

$$x=1-\frac{2V}{v}\cdot\frac{p}{B},$$

och efter insättning i (3) $p_{NO_2}=2p$,

i (4) $p_{N_2O_4}=\frac{v}{2V}\cdot B-p.$

Apparaten utgöres av ett mantelrör (415 . 53 mm), som fylles med vatten och tjänstgör som termostat. I detta rör äro på det sätt, som framgår av fig. 1 insatta två gasbyretter A och B; A, som rymmer 30 cc och är graderad i $^1/_{10}$ cc, är med en vakuumslang förenad med kvicksilverbehållaren C och är avsedd för kväveoxiden. Byretten B, avsedd för syre, är ograderad och rymmer likaledes ungefär 30 cc. Den är vidare och därför kortare än A. Avsikten härmed är att påskynda gasblandningens homogenisering och att få likformig temperatur i reaktionskärlet. B:s volym bestämmes en gång för alla genom utvägning med vatten; i förf:s apparat är den 36,70 cc vid 20°. M är en kvicksilvermanometer med liten inre vidd, dock icke kapillär; den är

för att bekvämt kunna rengöras förenad med den övriga apparaten medelst en kapillär slipning, men kan naturligtvis också smältas fast. Alla övriga rörledningar äro möjligast

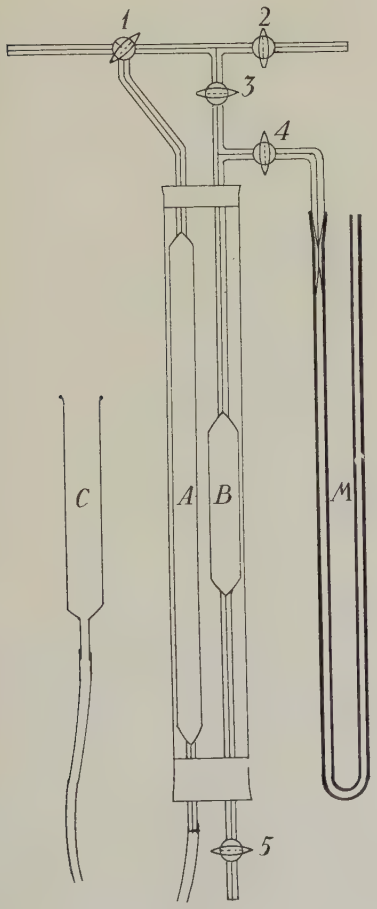


Fig. 1.

Fig. 2.

kapillära, även kranarna. Ej inritade i fig. 1 äro en termometer och ett genom den övre proppen till mantelrörets botten gående rör, genom vilket man blåser luft (med munnen) för att få likformig temperatur. I fig. 1 är ej heller inritad uppvärmningsanordningen, som i stället återges av

fig. 2. Den utgöres av två glasrör, förenade med en ligatur, det nedre av jena- eller svårsmält glas och 9—10 mm vidd, som uppvärmes vid knäet med lågan från injektorn till en bunsenbrännare. Låghöjd för 35—40° endast 5—10 mm. Den övre delen av värmeledningen är utvidgad och har fått sin form för att kunna upptaga de luftblåsor, som emellanåt infångas, då man blåser luft genom termostaten, så att dessa bubblor icke bilda något hinder för vattencirkulationen. Det översta ansatsröret är till för att man skall kunna fylla röret (genom sugning).

Försöket utföres på följande sätt.

Syret tages från en gasometer, fylld med handelns syrgas. Innan den införes i apparaten, torkas den med svavelsyra och fosforpentoxid. Indifferenta föroreningar spela ingen roll (jmfr ovanstående härledning).

Kväveoxiden framställes i förråd av saltsurt ferrosulfat + natriumnitrit [1] och förvaras i gasometer över vatten. På sin väg till apparaten får den passera 90 %-ig svavelsyra (för bestämning av gasströmmens hastighet), varpå den torkas med fosforpentoxid. Kväveoxiden bör vara så ren som möjligt.

Apparaten förberedes på följande sätt:

1. Lågan under värmeledningen tändes, ju längre tid i förväg, dess bättre.

2. Syrgasbyretten *B* fylles, bäst genom kranen 5 med kranarna 1 och 4 stängda, 2 och 3 öppna. Då byretten är fylld, stänges kranen 5, därpå 3.

3. I NO-byretten lyftes kvicksilvret upp till trevägskranen 1, varpå denna ställes så, att byretten är stängd.

4. Rörledningen 1—2 spolas med NO, tills all NO_2 är borta, därpå inställes kranen 1 på förbindelse mellan NO-gasometern och byretten. Genom att långsamt sänka kvicksilvret fyller man byretten med NO. Kranen 2 stänges, och n:r 1 vrides $^1/_2$ varv, så att kväveoxiden nu begränsas uppåt av kranarna 2 och 3, nedåt av kvicksilver.

[1] Se t. ex. L. Moser, Die Reindarstellung der Gase, 1920.

Under förutsättning av temperaturinställning kan försöket nu börja.

5. Kranen 5 vrides $^1/_2$ varv i och för möjligen behövlig tryckutjämning.

6. NO-volymen avläses vid barometerstånd, kvicksilverbehållaren lyftes något, kranen 3 öppnas, varvid NO-strömmar över över i *B*. Samma kran stänges, varefter den nya NO-volymen avläses.

7. Manometerkranen 4 öppnas och stänges igen, så snart kvicksilvret inställt sig, vilket sker inom en sekund. Manometern avläses, vilket på ett tillfredsställande sätt kan ske med hjälp av en lös milimeterskala, som stödes mot ett horisontellt underlag.

8. En ny portion NO inpressas och uppmätes; det nya trycket i *B* uppmätes o. s. v.

9. Barometerståndet avläses.

Under och mellan alla dessa operationer blåser man flitigt i omröraren, avläser, antecknar och reglerar temperaturen.

Här nedan följer in extenso journalen över en av förf:s försöksserier.

28. 12. 1932. $V = 36.70$ cc, $B/0° = 760.3$ mm.

t	Avläsn. på A	Kväveoxid	Avläsningar på manometern		p	Tryck av $NO_2 = p_1$	Tryck av $N_2O_4 = p_2$	$\frac{p_1^2}{p_2}$
o	cc	cc	mm	mm	mm	mm	mm	
29.2	29.40							
29.3	25.17	4.23	262	237	25	50	19	132
29.3	21.06	8.34	271	228	43	86	43	172
29.3	16.87	12.53	278	222	56	112	74	170
29.4	12.52	16.88	284	216	68	136	107	173
29.4	7.75	21.65	290	210	80	160	144	178
29.3	3.86	25.54	293	207	86	172	179	165
29.3	0.30	29.10	297	204	93	186	208	166

En jämförelse mellan trycken av NO_2 och av N_2O_4 visar, att trycket av N_2O_4 växer mycket raskare än NO_2-trycket, varför det kan vara motiverat att utföra den prövning, vars resultat tabellerats i den sista kolumnen. Om vi bortse från

det första värdet, vars osäkerhet är påtaglig, råder tydligen ganska god proportionalitet mellan p^2_1 och p_2, och vi kunna som resultat av försöksserien sätta

$$K_p = \frac{p^2_{NO_2}}{p_{N_2O_4}} = 171 \pm 2.0,$$

eller om trycket mätes i atmosfärer

$$K_p = 0.225 \pm 0.0026.$$

För att ersätta trycken med koncentrationer begagna vi gasernas allmänna tillståndsekvation

$$p = cRT,$$

vilket ger

$$K_p = \frac{c^2_{NO_2}}{c_{N_2O_4}} \cdot RT$$

och

$$K_c = \frac{c^2_{NO_2}}{c_{N_2O_4}} \; (= K_p/RT/^{-1}),$$

som är massverkans lag i dess vanliga formulering.

I nedanstående tabell äro införda resultaten av försök vid olika temperaturer (tryckenhet mm).

t	K_p	Medelfel		Antal värden	K_p (B. och K.)	K_p (V. och D.)
		abs.	%			
°						
17.0	90	2.6	2.9	4	59	55
17.3	102	4.9	4.8	7		60
29.3	171	2.0	1.2	7	153	150
31.0	178	4.6	2.6	5	174	180
35.7	196	2.5	1.3	5	247	257
43.7	297	32	11	4	430	473
50.0	960	56	5.8	6	620	
50.3	1050	64	6.1	5		

Försöken vid rumstemperatur gjordes i avsikt att se, om man kan undvara den uppvärmda termostaten, som ju komplicerar anordningen något. Medelfelets storlek visar, att resultatet blev dåligt. Man befinner sig här tämligen

nära kvävetetroxidens kondensationspunkter vid rådande tryck och särskilt mot slutet av försöket, då trycket av N_2O_4 uppgår till ett par hundra mm; konstanterna vid dessa temperaturer visade också en motsvarande gång. Även vid 50° erhöllos dåliga resultat; vid denna höga temperatur äro N_2O_4-trycken små, avläsningsfelen stora. En temperatur i omgivningen av 30° synes vara den lämpligaste.

Som nämnt angripes kvicksilver omedelbart även av torr kvävedioxid, varför meniskerna i manometern och även i byretten A efter någon tids arbete bliva förstörda. Den senare fylles visserligen med kväveoxid, men en förorening eller bildning av NO_2 är svår att helt undvika. Efter tre försöksserier har jag funnit det nödvändigt att rengöra apparaten.

Det kunde då ligga nära till hands att låta gaserna byta plats, d. v. s. fylla A med syrgas och införa denna i ett överskott av NO i byretten B. Härvid skulle man därjämte vinna, att det uppstår ett undertryck i B, varför manometerkvicksilvret suges inåt, vilket i sin tur nästan fullständigt upphäver risken för denna menisks deformering. Det finnes tyvärr ett absolut hinder för detta sätt att arbeta, nämligen det förhållandet, att den bildade kvävedioxiden omsätter sig med överskott av NO enl.

$$NO_2 + NO = N_2O_3.$$

Man har således nu två jämvikter i systemet, vilket orsakar en kraftig gång i den för reaktionen (1) beräknade jämviktskonstanten. Men då ändamålet med försöket uppnås med en serie och därunder icke någon nämnvärd försämring av kvicksilverytorna äger rum, om man iakttager tillbörlig försiktighet, så spelar det anmärkta förhållandet här icke någon roll.

Den här ifrågavarande jämvikten har noggrannt undersökts av M. Bodenstein och M. Katayama (Z. f. Elektrochemie *15*, 244; 1909), som giva följande formel för K_p (trycket i atm.):

$$\log K_p = -\frac{2692}{T} + 1\,.\,75 \log T - 4\,.\,83\,.\,10^{-3}\,T + \\ + 7\,.\,144\,.\,10^{-6}\,T^2 + 3\,.\,062.$$

Med användning härav hava jämviktskonstanterna i tabellens 6:te kolumn (B. och K.) beräknats. Överensstämmelsen är i allmänhet långt ifrån god, vilket väl kan tillskrivas förf:s enkla försöksanordning, föroreningar i kväveoxiden, det snabba och nödvändigtvis summariska arbetssättet och andra felkällor.

En mycket ingående undersökning har nyligen publicerats av F. VERHOEK och F. DANIELS (Journ. of Amer. Chem. Soc. *53*, 1250; 1931). Dessa förff. finna, att jämviktskonstanten varierar med trycket, och ange följande formler (p i atm., C i g-mol/l):

vid 25°: $K_p = 0.1426 - 0.7588 \cdot C_{N_2O_4}$,

35°: $K_p = 0.3183 - 1.591 \cdot C_{N_2O_4}$,

45°: $K_p = 0.6706 - 3.382 \cdot C_{N_2O_4}$,

där således den konstanta termen anger en idealiserad jämviktskonstant vid oändlig utspädning. Koncentrationsberoendet orsakas av att gaserna ej följa den allmänna tillståndslagen. Konstanternas värden vid andra temperaturer har jag erhållit genom att i ett diagram införa $\log K_p$ (för $C = O$) mot $1/T$. De erhållna punkterna ligga noga på en rät linje, på vilken K_p-värdena för tabellens temperaturer uttagits och, omräknade i mm, införts i tabellens 7:de kolumn (V. och D.). De äro icke utan vidare jämförbara med de övriga värdena, eftersom de gälla för koncentrationen noll, men stämma ganska väl med de enligt Bodenstein och Katayama beräknade.

Ehuru de vid mina försök erhållna jämviktskonstanterna vid jämförelse med litteraturens värden visa sig mycket felaktiga utom i ett fall (vid 31°), kan syftet med försöket likväl anses uppnått, nämligen att (vid *en* temperatur) demonstrera sambandet mellan komponenternas tryck resp. koncentrationer i ett homogent jämviktssystem.

Bokanmälningar.

H. Dörrie, *Triumph der Mathematik,* Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur. F. Hirt, Breslau, 1933. 386 sid., RM 9: —.

Matematikens historia brukar i allmänhet ej ingå i studierna för akademiska examina. Det är skada, ty även om kännedom om den historiska utvecklingen ej spelar någon väsentlig roll för den matematiska bildningen, så skänker den dock vidgade vyer och nya synpunkter, som för en lärare är av stor betydelse, icke minst genom de intresseväckande glimtar av gångna tiders matematik, som han kan ge i sin undervisning. Varje lärare borde därför vara något hemmastadd i matematikens historia, speciellt om han undervisar på gymnasiet. Vill man inte ta till några större arbeten, så finnas goda sådana av mindre omfattning. Särskilt skulle jag vilja framhålla ett litet häfte på endast 80 sidor: W. Lietzmann, Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik (Teubner, RM 1: 80), som är skrivet speciellt för skolans behov.

Ett originellt och lyckat grepp på uppgiften att orientera i matematikens historia synes vara att gruppera historiska notiser kring ett antal berömda problem från skilda tider. Det var därför med högt spända förväntningar undertecknad gick att ta del av det nyutkomna arbetet av Dörrie. Och på det hela taget svekos de ej heller.

Som titeln anger, äro 100 berömda problem behandlade, huvudsakligen hämtade från elementarmatematiken. De äro sammanförda i sex grupper: aritmetiska (25 st.) och planimetriska uppgifter (15 st.), problem rörande kägelsnitt och cykloider (25 st.), stereometriska (10 st), nautiska och astronomiska uppgifter (13 st), maxima och minima (12 st.). Bland de behandlade problemen från den rena matematiken kunna nämnas: talet *e*, Fermats stora sats, algebrans fundamentalsats, Sturms teorem, Abels ekvationssats, Hermite-Lindemanns transcendenssats, Eulers linje, niopunktscirkeln, Monges sats, Apollonios' tangeringsproblem, Mascheronis cirkelproblem, Steiners linjalproblem, kubens fördubbling, vinkelns tredelning, Gauss' sats om reguljära polygoner, Archimedes' bestämning av π, Archimedes' parabelkvadratur, Desargues' triangel-

sats, Pascals sexhörning, Brianchons sexsiding, reguljära polyedrar.

En del av de problem som medtagits, ha endast obetydligt intresse och kunde enligt undertecknads mening ha ersatts med andra. Sålunda saknas bl. a. följande bekanta problem: tredje- och fjärdegradsekvationernas lösning, Apollonios' satser om kägelsnittens konjugatdiametrar, de koniska sektionerna medelst Dandelins klot, Archimedes' semireguljära polyedrar. Emellertid är det klart, att vid ett dylikt urval den personliga smaken alltid måste göra sig gällande; vad en anser viktigt, kan en annan fästa mindre avseende vid.

Problemen äro försedda med historiska notiser rörande deras ursprung och lösningar, måhända borde denna historiska ram ha markerats mera. De utförda lösningarna äro i regel icke de ursprungliga, som ju ofta äro omständiga, utan utgivaren har valt de enligt hans uppfattning enklaste och lämpligaste. Man får där glänsande prov på de matematiska metodernas mångsidighet och elegans.

Då dessutom den typografiska utstyrseln är mycket förnämlig, tror jag icke det vore bortkastade pengar, om boken komme i åtanke både för enskilda matematiklärares och för läroverkens bibliotek, måhända även som premiebok i realgymnasiets högsta ringar.

C. E. Sjöstedt.

Jakob Jensen, *Praktisk Matematik.* Lærebog for sproglige Gymnasier. Jul. Gjellerups Forlag, København 1932, 174 sid., 8 kr.

I Danmark finnes inom matematiken jämte ett livligt pedagogiskt intresse ett intimt samarbete mellan skolans och forskningens målsmän, kännetecknat bl. a. därav, att åtskilliga av de senare författat värdefulla läroböcker i elementär matematik. Därigenom har lärostoffet i danska skolor kommit att i högre grad än här i landet influeras av det sista århundradets matematiska forskning.

Den ovan nämnda läroboken innehåller algebra med planimetri, en bred framställning av elementär funktionslära, innefattande även något analytisk geometri samt trigonometri.

Den börjar med ett ytterst intressant substitut för läran om irrationella tal, påverkat av Hjelmslev's bekanta Virkelighedsgeometri. *Fixeringstal* kallas varje tal, som ligger mellan felgränserna för någon storhet, vilken säges vara *fixerad* genom detta tal. Ett sådant tal, där osäkra siffror borttagits genom vanlig avkortning, kallas ett *naturligt* fixeringstal. Räkneregler uppställas för fixeringstal, varvid man får satser, analoga med dem angående

de absoluta och relativa felens förhållande vid de enkla räknesätten.

Därefter behandlas avkortad multiplikation och division. Rec. vill därtill anmärka, att dylika numera böra tillmätas mindre betydelse än förr. Någon fördel erbjuda de (liksom »räkneknep» över huvud taget) den räknande endast om de efter grundlig inövning ofta användas. I sådana fall använder man nu för tiden ofta räknemaskiner eller för det speciella användningsområdet avpassade tabeller.

Tack vare införandet av begreppet fixeringstal kan författaren reda sig utan att definiera irrationella tal. Så heter det t. ex. i början av läran om kvadratrötter, då det gäller att finna roten till 1,7: »*Geometrisk udtrykt* drejer det sig her om at finde et Fixeringstal for Siden i et Kvadrat, hvis Areal er 1,7, og hertil er inden for vort Maaleomraade 1,3 anvendeligt. *Aritmetisk udtrykt* drejer det sig om at finde et Tal, hvis 2. Potens er 1,7 og et saadant kender vi ikke. Derimod har vi i Aritmetikken lært en Metode, *Kvadratrodsuddragning,* ved hjelp af hvilken *det er muligt at bestemme Tal, hvis Kvadrater afviger vilkaarligt lidt fra et opgivet Tal.*»

I fråga om lärostoffet i övrigt har förf. uppställt som motto dels att främst behandla det, som lärjungarna ha störst praktiskt intresse att lära känna, dels att hela lärostoffet skall kunna uppbyggas som en serie praktiska övningar i teckning, mätning och räkning.

Till följd härav får funktionsteorien en central plats delvis med undanskjutande av algebran. Grafisk framställning användes skickligt på alla områden som åskådningsmedel och dess användning för att åstadkomma, kontrollera och förbättra ett talmaterial (grafisk »beräkning», interpolation och felutjämning) genomgås. En del av den analytiska geometrien, i den mån den rör räta linjer och cirklar, genomgås i samband med funktionsteorien. Boken avslutas med en kort redogörelse för derivator och deras användningar.

Räkning med tabeller genomgås ungefär på samma sätt och till samma omfattning, som är gängse i svenska skolor. För mera invecklade sifferräkningar innehåller boken förslag till lämpliga uppställningar. Rec. vill anmärka på, att räknestickan behandlas först sedan räkning med logaritmtabeller övats, och anser, att om räknesticka skall komma till användning, detta skall ske på ett så tidigt stadium som möjligt och logaritmtabeller tillgripas först då behov av större noggrannhet uppkommer.

När man bläddrar i en svensk lärobok i algebra, bibringas man

lätt den oriktiga föreställningen, att matematikens huvuduppgift är att uppsöka rötter till ekvationer av högre grad. I själva verket förekommer det jämförelsevis sällan vid »naturliga» uppgifter, att man behöver lösa dylika; detta gäller även om andragradsekvationer. I den nu ifrågavarande läroboken har detta markerats därigenom, att teorien för ekvationer av andra och högre grader behandlas knapphändigt först efter i praktiskt hänseende användbarare teorier, bl. a. läran om logaritmer och trigonometri.

Kursen i trigonometri har ungefär samma omfattning som motsvarande kurs hos oss på latinlinjen. I fråga om definitioner kan som en förtjänst följande anföras: I början definieras endast *en* funktion, nämligen tangenten, såsom en vinkelkoefficient, med vilket begrepp lärjungarna i det föregående gjorts väl förtrogna. Därefter definieras sinus och cosinus med hjälp av enhetscirkeln, varigenom den hos oss vanliga dubbeldefinitionen undvikes. De hos oss gängse definitionerna som förh. mellan sidor i en rätvinklig triangel bli därigenom viktiga lärosatser för rätvinkliga trianglar. Funktionen cotangenten, som är överflödig, omnämnes icke.

I sammanhang med trigonometrien behandlas mätinstrument, bl. a. Jakobsstaven, sextanten och teodoliten. En mängd värdefulla historiska uppgifter förekomma på lämpliga ställen i själva texten.

Boken innehåller ett otillräckligt antal övningsexempel (c:a 400). Förf. hänvisar dels till existerande exempelsamlingar, dels till att varje lärare själv kan tillverka exempel, ett förhållande, som möjligen ej mycket förminskar bokens användbarhet i en skola, men gör den mindre lämplig för självstudier. Man kan också anmärka på, att boken icke innehåller svar till de uppgifter som förekomma.

Priset är i jämförelse med svenska förhållanden ganska högt.

Gustav Hössjer.

Lundberg-Olsson-Sefve, *Svensk produktion och svensk utrikeshandel*, i serien »Till husbehov». Svenska bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1932, 162 sid., kr. 2:75.

Depressionen, dess orsaker, verkningar och medlen till dess hävande torde för närvarande vara det ämne, som är mest aktuellt för såväl samtal som diskussioner. Och detta av helt naturliga skäl. De nationalekonomiska problemen tränga sig inpå oss och framstå desto svårlösare, ju mer vi ge oss i kast med dem. Den ytlige betraktaren är däremot snart färdig med sin finansplan

för världshushållningens reorganisation och är ofta utan minsta motivering tvärsäker på sin sak.

Det är för att få in mer saklighet vid föreliggande diskussion, som författarna till detta lilla häfte om 160 sidor gjort upp en sammanställning över vår produktionsförmåga och vårt härpå grundade handelsutbyte med utlandet -- ett i sanning vällovligt förehavande.

Inledningsvis framhålles, hurusom alltsedan upptäckten av Amerika de ökade kommunikationerna och därmed handelsförbindelserna kommit de olika ländernas näringsliv att bli mer och mer beroende av varandra. En fluktuation på ett håll måste följdriktigt avspegla sig jorden runt. Som belägg härför påvisas, att kurvan över vårt lands totala handelsutbyte följer kurvorna över produktionsvärdet för Förenta Staternas industri samt över arbetarnas antal och reallön därstädes. Efter ett maximum år 1929 stupa kurvorna så brant nedåt, att läsaren avstår från att extrapolera mot framtiden.

Depressionen är sannerligen ingen myt. Inför det nakna faktum, att värdet av de produkter, som föras i världshandeln år 1929 till slutet av år 1931 minskats med 43 %, borde mänskligheten ena sig om att bygga upp i stället för att riva ned.

Så följer detaljgranskningen av vårt näringsliv. Efter en kort men skickligt gjord historik över varje närings ställning under tider, som svunnit, redogöres för status quo med handelsstatistiken för år 1930 som matematisk grundval. Det är förvånande, att författarna inom en så pass snäv ram lyckats lämna en så fullödig bild av situationen med orientering både bakåt och framåt i tiden. Man konstaterar med tillfredsställelse, hurusom näringslivet, trots de allvarliga följder en till synes tillfällig fluktuation kan åsamka, dock i stort sett följer vissa lagar för sin utveckling.

För övrigt förefaller det som om vi knappast skulle behöva göra oss några samvetsförebråelser vis-à-vis försummade produktionstillfällen. Importen av lyxartiklar, vilken stigit i kapp med välståndet, skulle nog ändå kunna begränsas väsentligt utan förfång för trevnaden.

Först behandlas brödsädsproduktionen geografiskt och ekonomiskt. Vårt land är som bekant ej självförsörjande på detta område. Så redogöres för produktionen av animaliska födoämnen av vilka export föreligger. Fasta och flytande fettämnen utgöra ju råämnen till åtskilliga industrier, vilkas tekniska drift och ekonomiska förutsättningar närmare utredas.

Kolonialvaror, frukter, tobak och drycker importeras i en myc-

kenhet, som säkert skulle komma de gamle fäder med bark i brödet att ruska på huvudet.

Textilindustrien har trots bristen på råvara inom landet en tämligen dominerande ställning.

Järnet och skogarna utgöra av ålder våra värdefullaste tillgångar, vilka också tillvaratagits konsekvent. Cellulosan ha vi rätt att vänta mycket utav. Dess tekniska utnyttjande har knappast trots redan vunna resultat lämnat försöksstadiet.

Depressionens slagskugga förmår sålunda ej förmörka de många ljuspunkter, som studiet av våra försörjningsmöjligheter ger vid handen. Det svenska namnet har en gång gått genom världen med uppfinningar sådana som kullager, separatorer, Agafyrar och allehanda nyttighetsprodukter inom elektroteknisk industri. Gärna vilja vi därför hoppas, att förhandenvarande svårigheter icke skola bliva oss övermäktiga utan endast skola tjäna till att skärpa vår vilja och energi att ånyo erövra en plats i solen för vårt land.

För den som vill orientera sig i avseende på vårt näringsliv och dess förutsättningar utgör föreliggande bok en lika överskådlig som värdefull tillgång. *Samuel Hennichs.*

Kosmos, Fysiska uppsatser, Bd. 10, Utgivna av Svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution), Stockholm 1932, 251 sid. I bokhandeln häft. kr. 10:—. Medlemskap, årsavg. kr. 10:—, medför rätt till ett bundet ex. Anmälan till prof. G. Borelius, Tekniska Högskolan, Stockholm.

År 1907 belönades Albert A. Michelson med nobelpriset för »hans optiska precisionsinstrumenter och hans därmed utförda undersökningar inom precisionsmetrologien och spektroskopien». Ända till sin död för snart två år sedan var Michelson verksam på dessa områden av fysiken, där han redan skurit sin ungdoms lagrar. Inför den år 1895 verkställda uppmätningen av archivemeterns längd, som befanns utgöra 1 553 164,03 våglängder av det röda Cd-ljuset, torde väl varje fysiker ha känt något av helig andakt. Det negativa resultatet av Michelsons berömda interferometerförsök för bestämning av etervindens hastighet och riktning, gav incitamentet till relativitetsteoriens uppställande. Med stjärninterferometern har han mätt avlägsna stjärnors diameter, som på annat sätt ej kunnat observeras.

Fru Anna Beckman inleder Kosmos tionde band med en välskriven och därtill lärorik minnesteckning över denne store fysikers liv och gärning.

De anisotropa vätskorna ha sedan flere år varit föremål för ingående teoretisk behandling förnämligast av prof. Oseen. Docent

Anzelius, som likaså ägnat sig åt dessa ämnens utforskande meddelar här något om resultatet av sina undersökningar och ger i anslutning därtill en intressant tillämpning på anisotropa vätskors strömning i kapillärrör och deras rörelse mellan koaxiala cylindrar (Couette'ska strömningen).

Energiutbytet mellan gasmolekyler och fasta kroppar, t. ex. vid värmeledningen är beroende av affiniteten mellan gasen och fasta kroppen. Amanuensen Fredlund redogör för hur man med modärna fysiska hjälpmedel angripit problemen inom ytkemien och därvid gjort många intressanta iakttagelser. Man har exempelvis funnit, att vätgasatomer vid adsorption på nickel ordna sig till ett rymdgitter, och att detta sedan växer till så att det uppstår ett vätgaskristallskikt på ytan, flere atomplan tjockt. Bringas vätgaskristallen i kontakt med kväve, brytes den ned under sannolik bildning av ammoniak. I andra fall t. ex. då argon adsorberas på nickel fås en oordnad gruppering i adsorptionsskiktet.

Under åtskilliga år har docenten H. Köhler sysslat med studiet av vattenångans kondensation i atmosfären och molnens konstitution. För dessa sina uppmärksammade undersökningar lämnar han här en sammanfattning. Det skulle föra för långt att i detta referat gå närmare in på de intressanta resultaten. Det torde emellertid böra särskilt understrykas, att vad som i atmosfären utgör kondensationskärnor för vattenångan synes vara från haven upprivna saltpartiklar, lösta i vatten, ej stoft eller joner. De senare kräva 4 à 8 ggr. övermättning för att kunna fungera som kondensationskärnor och stoft, som ej är hygroskopiskt t. ex. kolstoft från en kolkällare är fullkomligt verkningslöst. Molnen bestå i allmänhet av vattendroppar, även då deras temperatur är långt under noll grader. Ur moln av underkylda vattendroppar falla iskristaller i svärmar, lagra sig under de verkliga molnen, och kunna så ge upphov till halofenomenen.

Vem vill lära sig, hur man lyckas få ägg liksom hårdkokta utan någon uppvärmning och hur man fryser vatten till is vid + 70° Celsius? Lic. J. Tandberg beskriver detta och mycket annat nöjsamt och för fysikern intressant i en uppsats om de höga tryckens fysik.

Få av den fysikaliska forskningens upptäckter ha så omedelbart kommit de tillämpade vetenskaperna till godo som Röntgens. Dr. Thoraeus, själv fysiker vid Radiumhemmet i Stockholm, skildrar röntgenstrålarnas användning inom den medicinska radiologien samt de för fysikern speciellt intressanta frågorna rörande den primära strålningens filtrering, absorption vid inträngningen i kroppens vävnader och den därstädes uppväckta ytterst intensiva sekundärstrålningen.

Prof. Oseen bidrager med en utomordentligt elegant essä över fysikens rumskonstruktion. Han börjar med en granskning av förhållandet mellan fysikens rum och matematikens och visar sedan, hur den modärna fysikens rumskonstruktion, ledande till det fyrdimensionella rummet, kan sägas utgöra fortsättningen av den psykiska process, genom vilken vi i barndomen kommo fram till den allmänmänskliga föreställningen om det tredimensionella rummet. Oseens framställning synes mig äga något av den klassiska skönheten.

Årsboken avslutas med en intresseväckande och sakrik översikt över nyare experimentella undersökningar av de ferromagnetiska metallernas egenskaper, författad av prof. G. Borelius samt över huvudsakligen från Weiss stammande teorier, vilka varit och i modärn form alltjämt äro de viktigaste arbetshypoteserna inom detta område. Den Ampèreska teorien är således endast av historiskt intresse.

I anslutning till Borelius' uppsats refererar docent Waller nya teorier för ferromagnetismen, byggda på kvantmekanikens grund. Ur principiell synpunkt viktigast är den av Heisenberg givna tydningen av de Weiss'ska molekulära magnetfälten. De nyare teorierna utgöra visserligen ej en tillfredsställande förklaring, men deras betydelse ligger däri, att de ge en inblick i den fysikaliska naturen av de invecklade fenomen, vi iakttaga hos ferromagnetika.

Atomernas utanverk, elektronhöljena, börja nu bli helt kartlagda och utforskade och arbetet är för närvarande intensivt inriktat på den vida svårare uppgiften att utrannsaka atomkärnans struktur. Man har redan kommit långt. Flere av de metoder, som visat sig ge så lysande resultat vid erövringen av atomernas utanverk, ha även befunnits användbara vid angreppet på själva kärnan.

Man har redan uppdagat, att vätet är en blandning av två grundämnen med atomvikten 1 och 2, syret består av tre isotoper med atomvikterna 16, 17 och 18. Atomkärnornas beståndsdelar tyckas vara H^1-, H^2- och He-kärnor samt neutroner. Om elektroner ingå i kärnan, som förut antagits, synes numera tvivelaktigt.

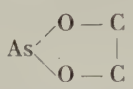
Professor Hulthéns sammanställning av de nyaste undersökningarna över atomkärnans konstitution hör till de mest läsvärda bidragen i denna synnerligen läsvärda årgång av Kosmos. Han kommer även in på de nya idéerna rörande de radioaktiva kärnornas fysik och de nyare atomsprängningsförsöken, som lyckats med spänningar, så märkvärdigt låga som 150 à 300 kilovolt. Ett exempel: $Li^7 + H^1 \rightarrow 2\ He^4$, den första med konst utförda kärnsyntesen!

Martin Sjöström.

Gradualavhandlingar.[1]

Bertil Englund, *Die Reaktion zwischen Diolen und Arsenverbindungen.* Nova Acta Reg. Soc. Sci. Ups. IV vol. 8: 3. Disp. i Uppsala 16 april 1932. Opponenter: docenten Paul Nylén och fil. lic. J. A. Reuterskiöld.

Förf. fann i samband med undersökningar av arsonättiksyra $HOCOCH_2AsO(OH)_2$ och dess derivat, att denna syra, som innehåller 5-värdig arsenik och är en stark syra, i likhet med arseniksyra lätt reagerar med vissa tvåatomiga alkoholer och fenoler. (Reaktionen mellan enatomiga alkoholer och oorganiska syror är som bekant däremot mycket långsam.) Med etylenglykol och pinakon (tetrametyl-etylenglykol) samt ett antal andra α-glykoler erhöllos kristalliserade *arsonsyre-estrar*, innehållande ringsystemet



Dessa cykliska estrar äro lösliga i flera organiska lösningsmedel; av vatten sönderdelas de, i vissa fall med bekvämt mätbar hastighet. Di-glykol-arseniksyra, $HOAs(C_2H_4O_2)_2$, är en svag syra, den komplexa tri-glykol-arseniksyran, $H[As(C_2H_4O_2)_3]$, är en stark syra, varav salter kunnat framställas.

Reaktionen mellan organiska dioxiföreningar (för dessa har man infört namnet *diol*) och arsenikföreningar studerades närmare. Genom polarimetrisk mätning av hastigheten vid arsonättiksyrans reaktion med d-vinsyra fastställdes det för en esterbildning ovanligt snabba förloppet, vartill en analogi dock är känd, nämligen de cykliska acetalernas bildning. Det kan förmodas, att en additionsförening först uppstår, ur vilken sedan den stabila estern med ringstruktur bildas genom vattenutträde. — Olika diolers reaktionsförmåga undersöktes med en särskilt ut-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

arbetad metod, varvid man bestämmer den löslighetsökning av arsenikföreningen, som framkallas av kända mängder av diolen. Inalles prövades med denna metod 78 dioler under användande av 4 olika arsenikföreningar som »indikator» på reaktionsförmågan och i 3 olika lösningsmedel. Arsenikhalten i lösningarna bestämdes med den av Ramberg och Sjöström utarbetade metoden (vilken f. ö. är den i Sverige för arsenikprov i lag föreskrivna). Reaktionernas jämviktskonstant kan beräknas.

Huvudresultaten av undersökningen äro följande:

1. α-glykoler (1. 2-dioler) reagera lätt, alla andra strukturtyper betydligt svårare (den homologa serien av glykoler upp till pentadekan-1. 15.-diol prövades, varvid en egendomlig alternerande effekt kunde påvisas).
2. *Orto*-difenoler ha stor effekt, *meta*- och *para*-isomererna betydligt mindre.
3. Stereo-isomera dioler ha olika effekt.

Då dessa resultat jämföras med dem som vunnits med den bekanta »borsyremetoden» (mätning av borsyrans ledningsförmåga vid tillsats av dioler, varvid i s. k. gynnsamma fall starka komplexa borsyror bildas), framgår, att OH-gruppernas läge inom diolmolekylen är av största betydelse för ringslutningen. Metoden kan således användas för konfigurationsbestämning. Av de faktorer, som f. ö. inverka på reaktionen framhållas beträffande diolen den alifatiska kolkedjans böjlighet och de inom molekylen verkande attraktions- och repulsionskrafterna, samt beträffande arsenik-, resp. bor- och kol-atomen, dennas steriska värdighet (i vilket begrepp förf. innefattar atomens dimensioner och valensvinklar).

Frågan om de bildade heteroringsystemens stabilitet, en fråga, varom kunskapen ännu är mycket obetydlig, har upptagits till behandling med utgångspunkt från de på kemisk grund konstruerade spänningsfria molekylmodellerna för alicykliska föreningar, t. ex. C_6H_{12}, samt från den på kristallmätningar grundade kännedomen om atomdimensionerna. En molekyl betraktas som spänningsfri, då avståndet mellan två närliggande atomer är lika med summan av deras atomradier och vidare vinklarna mellan föreningslinjerna ej avvika från de normala valensvinklarna. Vid ringformig atomordning måste härvid vissa villkor vara uppfyllda. Dessa villkor ha formulerats för en 5-ledig ring och beräkningen genomförts under vissa förenklande förutsättningar.

Avhandlingens sista kapitel innehåller en utförlig, stereokemisk diskussion av de experimentella resultaten.

ROBERT THORÆUS, *A Study of the Ionization Method for Measuring the Intensity and Absorption of Roentgen Rays and of the Efficiency of different Filters used in Therapy.* Acta Radiologica Supplementum XV, Stockholm 1932, 88 sid. Disp. i Upsala d. 28 maj 1932. Opponenter: prof. M. SIEGBAHN och fil. mag. A. SANDSTRÖM.

Frågan om röntgenstrålarnas mätning, såväl kvalitativt som kvantitativt, har inom den medicinska röntgenologien diskuterats sedan tidigaste skeden. Åtskilliga av röntgenstrålarnas verkningar hava varit föremål för närmare undersökningar, och deras användbarhet för mätningsändamål har prövats. Ionisationsmetoden visade sig småningom vara den mest lätthanterliga och pålitliga. Sedan betingelserna för mätning av den rena luftionisationen blivit klarlagda, blev ionisationsmetoden på andra internationella radiologkongressen i Stockholm 1928 antagen som standardmetod och samtidigt fastställdes den internationella r-enheten, vars definition i fri översättning lyder på följande sätt: »1 r är den strålmängd, som i 1 cm^3 luft vid 0° och 760 mm Hg genom ionisation vid mättningsström, fullständigt utnyttjande av sekundärelektronerna samt undvikande av väggeffekter åstadkommer en elektricitets-transport av 1 elektrostatisk enhet».

Den från ett röntgenrör utgående strålningen bestämmes såväl kvalitativt som kvantitativt i första hand av rörets driftsbetingelser, d. v. s. spänning och strömstyrka. Mätningen av dessa faktorer samt den använda högspänningsapparatens egenskaper diskuteras av förf. i första kapitlet.

Det avsnitt, som behandlar ionisationsmätningarna, inledes med en redogörelse för de betingelser, som måste uppfyllas för mätning av den rena luftionisationen och för mätning av strålningen i r-enheter. Princip och anordning hos den av förf. på dessa grunder konstruerade standardkammaren angivas därefter i detalj. Själva kammaren är cylindrisk med en axiellt placerad mätelektrod. Ionisationsströmmen uppsamlas i en precisionskondensator, vars spänningsdifferens mätes med en precisionsvoltmeter inkopplad i en kompensationsanordning, i vilken en entrådselektrometer användes som noll-instrument. Anordningen i sin helhet har underkastats ingående prov beträffande mätnoggrannhet. Som slutresultat framgår, att strålningsintensiteten i r per minut kan mätas med ett fel icke överstigande ± 1,5 %.

Med den beskrivna standardkammaren har förf. utfört tämligen omfattande mätningar av absorptionen hos Al, Cu, Sn, Ag, Pb och vatten. Resultaten visa stora avvikelser från de vid andra institutioner erhållna värdena. Orsaken härtill anges av förf.

vara, att röntgenrör av olika slag använts, varigenom trots likhet i rörspänning och filtrering olika primärstrålning erhållits. Förf. påvisar emellertid, att om mätresultaten reduceras till kvalitativt ekvivalent primärstrålning, absorptionsmätningarna visa praktiskt taget fullständig överensstämmelse. Härav drages den slutsatsen, att absorptionsmätningar endast kunna jämföras om de använda röntgenrörens strålningskaraktäristiker äro kända.

Filtertekniken, som inom röntgenterapien har särskilt stor betydelse, då man ju medelst filtrering kan variera strålningens kvalitet inom mycket vida gränser, diskuteras därefter av förf. Filtreringen medför alltid en större eller mindre intensitetsförlust, som emellertid av praktiska skäl måste reduceras till det minsta möjliga. För ernående av en viss strålkvalitet gäller det sålunda att använda det mest ekonomiska filtret. Med den monokromatiska absorptionen som grundval undersöker förf. först frågan om ekvivalens mellan filtra av olika material. I det allmänna fallet, då ett inhomogent strålknippe filtreras med plattor av olika material, kan ekvivalensen vara av två slag, nämligen kvantitativ och kvalitativ. Dessa äro helt artskilda och måste betraktas var för sig. Det är emellertid den kvalitativa ekvivalensen, som tilldrar sig det största intresset. Förf. anger att två eller flera strålknippen endast kunna vara kvalitativt ekvivalenta, om de omfatta samma våglängdsområde och inom detta den relativa spektrala intensitetsfördelningen är lika. Villkoren för uppfyllandet av dessa betingelser diskuteras ingående. Därvid erhålles som resultat att man för de flesta material kan finna kvalitativt ekvivalenta filtra. Förf. visar även en metod för bestämmande av deras tjocklek. Resultaten verifieras genom experimentella mätningar, varvid därjämte även framgår, att kvantitativ ekvivalens icke åtföljer kvalitativ.

Detta förhållande är av utomordentligt stor betydelse för filterekonomien. Då det visat sig möjligt att med olika material erhålla kvalitativt ekvivalenta filtra, bör man av dessa välja just det som har den största genomskinligheten, d. v. s. som ger den mest ekonomiska filtreringen. Som exempel härpå må angivas de båda kvalitativt ekvivalenta filtren 0,5 Cu + 1 Al och 17 Al, av vilka det förra vid 165 kV likspänning ger icke mindre än 40 % större totalintensitet än det senare.

Som en värdefull tillämpning av dessa undersökningar må anges ett av förf. konstruerat filter, avsett att på grund av kvalitativ ekvivalens kunna ersätta det tidigare använda filtret 2 Cu + 1 Al. Det nya filtret har sammansättningen 0,44 Sn + 0,25 Cu + 1 Al och ger en 30 % större totalintensitet.

Avhandlingen slutar med en redogörelse för förf:s undersökningar rörande strålningsintensiteten inom en utifrån bestrålad homogen kropp. Med hänsyn till betydelsen av dylika mätningar för det röntgenterapeutiska arbetet har därvid använts vatten, som i det allra närmaste har samma egenskaper i förhållande till röntgenstrålarna som människokroppens mjukdelar. Strålningsintensiteten i varje punkt inom den bestrålade volymen är sammansatt av två komponenter, nämligen dels den på grund av absorption i vattnet mer eller mindre försvagade primärintensiteten och dels den sekundära intensiteten i form av ströstrålning från olika delar av den bestrålade vattenvolymen. Frågan huru totalintensiteten under olika betingelser kvantitativt sammansättes av dessa båda komponenter har av förf. undersökts enligt en delvis ny metod. Den totala strålningsintensiteten mätes direkt, medan den primära intensiteten beräknas genom en kombination av kvadratlagen och direkta mätningar av strålningens absorption i vatten. Ströstrålningsintensiteten erhålles därefter genom subtraktion av den primära från den totala.

Resultaten visa, att redan på ett par cm djup under vattenytan c:a hälften av totalintensiteten utgöres av sekundär ströstrålning. På större djup stiger procentsatsen till 75 à 80 %. Det visar sig vidare, att för en och samma bestrålad volym procentsatsen ströstrålning på ett och samma djup är praktiskt taget oberoende av det infallande strålknippets hårdhet.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

575) *En normalkorda i en parabel är given till längd och läge. Bestäm enveloppen för parabelns styrlinje.* X.

576) *Att genom en given punkt draga en sekant till två givna cirklar så, att de avskurna kordorna bli lika långa.*

577) *Lös ekvationen*

$$\sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}=(a+b)(c+x),$$

där a, b, c och d äro positiva. X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

578) Vilka fyrsiffriga tal äro så beskaffade, att summan av de två sista siffrorna är lika med den andra siffran, produkten av första och sista siffrorna lika med summan av de två övriga samt sista siffran kvadraten på den första?

Svar: 1101 och 2624.

579) Beräkna volymen av den största räta dubbelkon, som kan inskrivas i en regelbunden oktaeder (kant $= a$) på så sätt, att dubbelkonens spetsar sammanfalla med oktaederns centrum.

Svar: $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{81}$.

580) I en rät tresidig pyramid, vars höjd är h och vars basyta utgöres av en liksidig triangel, vars sida är a, inskrives en cylinder med maximivolym. Ovanpå denna cylinder inskrives på liknande sätt en andra cylinder och ovanpå denna en tredje, o. s. v. i oändlighet. Bestäm summan av alla dessa cylindrars volymer.

Svar: $\frac{\pi a^2 h}{57}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 578—580 äro insända av Ewe., 588 av E. S., 589—595 av X, 598 o. 599 av C. E. B.

581) Sjömän begagna sig av regeln, att avståndet till horisonten i storcirkelminuter (sjömil) räknat är $2\sqrt{h}$, då h är ögats höjd över vattenytan i meter. Undersök, hur nära denna formel är riktig, då h är så liten i förhållande till jordradien, att dess kvadrat får försummas. Jordens omkrets är 40,000 km.

Svar: formeln ger värden, som äro 4,4 % för stora.

582) Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= \sqrt{3} + 1 \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $\begin{array}{c|c|c} x & 75° + m \cdot 180° & -45° + m \cdot 180° \\ \hline y & -45° + n \cdot 180° & 75° + n \cdot 180° \end{array}$, där

$m + n$ är ett *jämnt* tal.

583) Visa, att i varje triangel

$$4T = a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha,$$

om T = ytan, a och b två sidor samt α och β motsvarande vinklar.

584) Eliminera v ur systemet

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos v + \cos 2v \\ y &= \sin v + \sin 2v \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^2 + y^2) + 2x$.

585) En rät linje rör sig så, att dess avskärningar på koordinataxlarna (a och b) uppfylla villkoret $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}$, där k är en konstant. Bestäm orten för normalens från origo fotpunkt på linjen.

Svar: Cirkeln $x^2 + y^2 = kx + ky$.

586) I en likbent triangel är medianen mot ena benet konstant ($= m$). Visa, att ytans maximivärde är $= \frac{2m^2}{3}$.

587) Konstruera en andra grads kurva, då styrlinjen och tre punkter på kurvan äro givna.

588) I en triangel äro två sidor a och b och höjden mot den tredje sidan h. Genom de båda sidornas mittpunkter drages kordan k i den omskrivna cirkeln. Visa, att

$$k^2 + h^2 = a^2 + b^2.$$

589) Ytan av en sfär delas i två kalotter K_1 och K_2 ($K_1 < K_2$) av en parallellcirkel. Den tangentkon, vars bottenperiferi sammanfaller med parallellcirkeln, har mantelytan M. Visa, att

$$\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} = \frac{1}{M}.$$

590) Visa (se föreg. ex.), att förhållandet mellan de volymer som inneslutas av M och K_1 samt av M och K_2 är $= K_1^2 : K_2^2$.

591) Om punkterna (1; —1), (2; 3), (6; —4), (0; 3), (—5; —3), (—3; 1), (1; —1) förenas i denna ordning, uppkomma två trianglar och en fyrhörning. Visa, att trianglarna tillsammans ha lika stor yta som fyrhörningen.

592) Vilken av cirklarna $x^2+y^2-2x+4y-4+m(x+y-2)=0$, där m varierar, har den minsta radien? Hur lång är denna?

Svar: $m=-3$; radien $=\sqrt{4{,}5}$.

593) Sök ekvationen för en cirkel, som skär cirkeln $x^2+y^2-4x++1=0$ under räta vinklar, delar periferien av cirkeln $x^2+y^2++x+y=0$ mitt itu samt får sin egen periferi mittituskuren av cirkeln $x^2+y^2-6y-1=0$.

Svar: $x^2+y^2=1$ och $x^2+y^2+x-5y=3$.

594) Sidorna i en triangel äro a, b och 1. Uttrycket $(a-4)^2++(b-1)^2-1$ kan tydligen fås att antaga hur stora värden som helst genom lämpligt val av triangel. Vilken är den undre gränsen för uttryckets värdeförråd?

Svar: 1.

595) Punkterna $A(a;\ 0)$, $A_1(-a;\ 0)$, $M(0;\ b)$ samt linjerna $L\equiv x=a$ och $L_1\equiv x=-a$ äro givna. En rörlig linje genom M råkar L och L_1 i resp. P och P_1. Linjerna AP_1 och A_1P råkas i Q. Sök orten för höjdernas skärningspunkt i triangeln AQA_1.

Svar: $y=\dfrac{2a^2}{b}$.

596) Sök orten för en punkt, varifrån två motstående sidor i en rektangel synas under samma synvinkel.

Svar: Orten utgöres dels av en rät linje, dels av de bågar av den omskrivna cirkeln, vilka ligga mellan sidorna, dels av de utanför rektangeln belägna delarna av en liksidig hyperbel gående genom hörnen.

597) En cirkel med radien 1 rör sig så, att den ständigt tangerar y-axeln. Från origo lägges en tangent. Sök orten för tangeringspunkten. Konstruera kurvan.

Svar: Ortens ekvation är $y^2(2-x)=x(x-1)^2$, om medelpunktens x-koordinat är positiv.

598) En fyrhörning har en sådan form, att en cirkel (radie $= r$) delar två sidor i tre lika delar och tangerar de båda andra i deras

mittpunkt. Beräkna fyrhörningens vinklar och uttryck dess sidor i r.

Svar: Fyrhörningen är antingen en rektangel med sidorna $2r$ och $\frac{4r\sqrt{2}}{3}$ eller en fyrhörning med vinklarna 86°,62; 90°; 93°,38 och 90° samt två sidor $= 2r$ och två sidor $= \frac{4r\sqrt{2}}{3}$.

599) Tre av en fyrhörnings vinklar äro lika. En cirkel (radie $= r$) lagd genom dessa vinklars spetsar delar två av fyrhörningens sidor mitt itu. Beräkna fyrhörningens vinklar och uttryck dess sidor i r.

Svar: De lika vinklarna $= 104°{,}48$, den fjärde $= 46°{,}56$. Två sidor $= r\sqrt{1{,}5}$ och två sidor $= r\sqrt{6}$.

Lösningar till uppg. 536—538.

536) *I en cirkel O inskrives ett parallelltrapets $ABCD$, där $AB = BC = CD$. OC skär AD i H. F är fotpunkten på AD av höjden från C. AD delas i punkten I så, att $AI = 2 \cdot ID$. Visa, att $HI = 2 \cdot IF$.* *Victor Dorph.*

Drag BH; $\angle DHC = \angle BCH = \angle DCH$, $\because BC = HD$ och $BCDH$ en romb. Vidare är ΔABH likbent och $AH = 2FD$, men $AH + HI = 2IF + 2FD$, $\because HI = 2IF$ *L.*

537) *AB är diameter i en given halvcirkel, P en variabel punkt på AB. Man uppritar på AP och BP som diametrar halvcirkelbågar åt samma håll som den givna. Visa, att den cirkel C, som tangerar dessa tre bågar, ständigt tangerar en annan fix cirkelbåge AB (utom den givna) och beräkna gradtalet för denna båge.* *X.*

AB:s mittpunkt är O. Sätt $AB = 2R$; $AP = 2s$ och $PB = 2t$, så är i ett polärt koordinatsystem med O till pol och OB till axel orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar bågarna AB och PB, ellipsen

$$r = \frac{2Rt}{R + t - s \cdot \cos v} \qquad (1)$$

(Med sedvanliga beteckningar är $2a = R + t$; $2c = R - t = s$, $\because b^2 = Rt$.) Orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar bågarna AB och AP, är ellipsen

$$r = \frac{2Rs}{R + s + t \cdot \cos v} \qquad (2)$$

Elimineras s och t, fås orten för medelpunkten till C. Av (1) och (2) fås

$$R + t - s \cdot \cos v = \frac{2Rt}{r}; \qquad R + s + t \cdot \cos v = \frac{2R \cdot s}{r},$$

varav genom addition och subtraktion

$$3R - (s - t)\cos v = \frac{2R^2}{r}$$

$$s - t + R\cos v = \frac{2R(s-t)}{r}$$

och efter elimination av $(s - t)$

$$r^2 \cos^2 v = 8Rr - 3r^2 - 4R^2 \quad \text{eller} \quad (2R - 2r)^2 = r^2 \sin^2 v$$

och

$$r = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}\sin v} = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}\cos(90° - v)},$$

d. v. s. en ellipsbåge med O till närmaste fokus och AB till parameter samt brännpunktsavstånd $= \frac{4R}{3}$. Men denna ellipsbåge är även orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar halvcirkeln AB och en annan cirkelbåge genom A och B med medelpunkt i ellipsens andra fokus och radien $= \frac{5R}{3}$.

Sättes nu det sökta gradtalet $= \alpha$, så fås $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ d. v. s. $\alpha = 73°{,}74$. *L.*

538) *Ett antal av 2^n kort, varav hälften äro markerade med en etta och hälften med en nolla, utläggas så, att efter varje utlagt kort (räknat från och med det första) nästa kort placeras sist i talongen, varefter följande kort utlägges o. s. v. Hur böra ettor och nollor fördelas för att utläggningen skall ge resultatet 101010...?* *S. Wigert.*

Av i första omgången utlagda kort (d. v. s. halva antalet) voro ordningsnumren för

ettor $4p + 1$ och nollor $4p + 3$ $(p = 0; 1; 2; \ldots)$.

Av i andra omgången utlagda ettor $2(4p + 1)$ och nollor $2(4p + 3)$
» » tredje » » » $2^2(4p + 1)$ » » $2^2(4p + 3)$
o. s. v.

Alltså måste ordningsnumren för ettor resp. nollor vara från början i hela högen $2^m(4p + 1)$ och $2^m(4p + 3)$, där $m = 0; 1; 2; \ldots$ och $p = 0; 1; 2; \ldots$

Undantag utgör det sista kortet, en nolla, vars ordningsnummer är 2^n. L.

Allmän-geometrisk härledning av den optiska avbildningens grundformler.

Av HANS GERTZ.

Grundlagarna för avbildningen genom optiska system härflyta, som bekant, på rent analytisk-geometrisk väg såsom egenskaperna hos den s. k. kollineära avbildningen. Denna senare representerar likväl ett rent fiktivt fall, tillämpligt endast i grannskapet av den optiska axeln, och är den dessutom, genom sin giltighet inom rummet oinskränkt, ägnad att föranleda illusionen av en möjlig analog utsträckning av den optiska avbildningen, något som är grundfalskt, även för de singulära fall (mikroskopet, det fotografiska objektivet) som här närmast kunde komma i fråga.

Det gives i stället en annan enklare väg, varpå den optiska avbildningen i axelns närhet på liknande allmänt sätt kan härledas, då närmast för den tvådimensionella avbildningen, i två konjugerade plan. Också är detta den allmänna formen för den optiska, paraxiala avbildningen, — i ett snett brutet strålknippes tangential- och sagittalsnitt.

Följande enkla erfarenhetsfakta utgöra förutsättningarna. Strålförening äger rum punktvis i axelns närhet. När objektpunkten framskrider längs en stråle i ljusets gångriktning, sker detsamma med bildpunkten. Om objektpunkten förskjutes — oändligt litet — vinkelrätt mot axeln, sker detsamma med bildpunkten, med proportionell hastighet.

En punkt på objektsidan må nu vandra i ljusets gångriktning utefter hela axeln. Då genomlöper bildpunkten också hela axeln, i ljusets riktning, varvid mot objektpunktens läge i oändligheten kan svara bildpunktens läge, antingen också i oändligheten eller i allmänhet i någon ändligt belä-

gen punkt, andra brännpunkten. Då objektpunkten rycker fram ur oändligheten, till ändligt läge, vandrar alltså bildpunkten — åtminstone först — genom en sträcka från brännpunkten, belägen på den sida därom, som ligger i ljusets riktning, d. v. s. om denna riktning generellt räknas positiv, på brännpunktens positiva sida. Göres samma betraktelse för en punkt på bildsidan, rörande sig mot ljusets riktning, och för dess motsvarande objektpunkt, så följer dels existensen av en ändligt belägen brännpunkt på objektsidan i det fåll en sådan finnes på bildsidan, dels befinnas objekt- och bildpunkt alltid belägna på olika sida om resp. bränn-

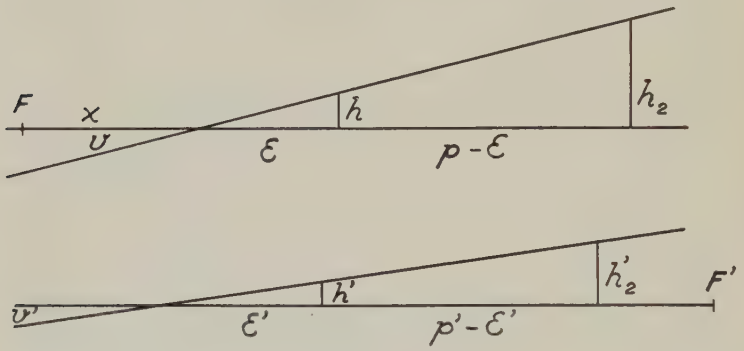


Fig. 1.

punkter, den ena på den positiva, den andra på den negativa sidan.

Antag en objektstråle, som skär axeln under vinkeln v (oändligt liten); motsvarande bildstråle har axellutningen v' (Fig. 1). Snittpunkterna med axeln ligga på den positiva resp. negativa sidan om tillhörande brännpunkt (FF'). I ett godtyckligt par konjugerade punkter (med index 2), på avstånden pp' från axelpunkterna (med index 1), tagas objektet h_2 och bilden h'_2 begränsade av axeln och nyssnämnda strålar. Då har man

$$v = \frac{h_2}{p}; \quad v' = \frac{h'_2}{p'}.$$

Tagas ett objekt och dess bild h och h', nära intill resp. axelpunkter, på de konjugerade sträckornas $\varepsilon\varepsilon'$ avstånd därifrån, så är även

$$v = \frac{h}{\varepsilon}; \quad v' = \frac{h'}{\varepsilon'}.$$

De två härav bildade uttrycken för $v' : v$ satta lika ge

$$\frac{h'_2}{h_2} \cdot \frac{p}{p'} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Nu tagas här $\varepsilon\varepsilon'$ oändligt små. Deras förhållande blir då $\frac{dp_1'}{dp_1} = \alpha_1$, djupförstoringen i axelpunkten, och förhållandet $h' : h$ övergår till lateralförstoringen $\varkappa_1$ i axelpunkten. Visserligen bli härvid hh' små storheter av andra ordningen, men deras förhållande förblir detsamma, om de tänkas växa till första ordningen. Sålunda

$$\alpha_1 \varkappa_2 = \frac{p'}{p} \varkappa_1. \tag{1 a}$$

Göras samma betraktelser för två konjugerade strålar, skärande axeln i orterna för $h_2 h'_2$, så följer

$$\alpha_2 \varkappa_1 = \frac{p'}{p} \varkappa_2. \tag{1 b}$$

Eliminering av $\frac{p'}{p}$ ger

$$\frac{\alpha_1}{\varkappa_1^2} = \frac{\alpha_2}{\varkappa_2^2} = \frac{\alpha}{\varkappa^2} = \text{konstant} = c. \tag{2}$$

Multipliceras (1 a) och (1 b), fås

$$\alpha_1 \alpha_2 = \left(\frac{p'}{p}\right)^2. \tag{3}$$

Häri kan endera α_1 eller α_2 utbytas mot $\frac{dp'}{dp}$, varvid sålunda sträckorna pp' tänkas föränderliga i de konjugerade

ändar, vartill $\frac{dp'}{dp}$ hänför sig. Detta utbyte väljes först så, att elementet dp' ligger åt brännpunktssidan, d. v. s. i figurens fall ersättes α_2 med $\frac{dp'}{dp}$:

$$\alpha_1 \frac{dp'}{p'^2} = \frac{dp}{p^2};$$

integrerat

$$\frac{\alpha_1}{p'} = \frac{1}{p} + \text{konst.} \tag{4}$$

Konstanten bestämmes genom att sätta $p = \infty$; p' antar då värdet $-x'$, brännpunktens avstånd från orten för α_1:

$$\frac{\alpha_1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha_1}{x'}. \tag{4 a}$$

På samma sätt integreras med sträckornas pp' andra ändar antagna föränderliga, efter utbyte av α_1 mot $\frac{dp'}{dp}$:

$$\frac{\alpha_2}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}, \tag{4 b}$$

varvid konstanten bestämmes genom att sätta $p' = \infty$; x är här avståndet från brännpunkten till den punkt vartill α_1 hänför sig. Av (4 a) och (4 b) bildas produkten $\alpha_1 \alpha_2$:

$$\alpha_1 \alpha_2 = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \frac{xx'}{(p+x)(p'+x')}.$$

Vardera membrum har här värdet $\left(\frac{p'}{p}\right)^2$, enligt (3), varav följer, dels

$$xx' = (p+x)(p'+x') = \text{konst.}, \tag{5}$$

Newtons formel,

dels $$\frac{x}{p} + \frac{x'}{p'} + 1 = 0, \tag{6}$$

Helmholtz' formel.

Å andra sidan fås av (4 a) genom multiplikation med $\frac{x'}{\alpha'}$:

$$-\frac{x'}{\alpha_1 p}+\frac{x'}{p'}+1=0.$$

Jämförelse med (6) ger vid handen

$$\alpha=-\frac{x'}{x}. \tag{7}$$

Ersättes här α med $\frac{dx'}{dx}$, leder integration till formeln (5) ovan.

Av (5) och (7) ses, att djupförstoringen (α) varierar symmetriskt i avseende å brännpunkterna. Detta samma gäller om lateralförstoringens absoluta värde, enligt uttrycket

$$c\varkappa^2=-\frac{x'}{x}, \tag{8}$$

vilket fås ur (2) och (7).

Tages $\varkappa=\pm 1$, så utmärkas tvenne kardinala, härmed definierade punktpar med brännpunktsavstånden $\pm\,\xi\,\xi'$. Av dessa kallas det par, tagna negativa, som hänför sig till fallet $\varkappa=+1$ för brännvidderna, $f\,f'$. De räknas då mot resp. brännpunkter från »huvudpunkterna», i vilka $\varkappa=+1$. Sålunda är

$$c=-\frac{\xi'}{\xi}=-\frac{f'}{f}; \tag{8 a}$$

och, enligt (5),

$$xx'=\xi\xi'=ff'. \tag{5 a}$$

För konjugerade avstånd räknade från huvudpunkterna blir (6):

$$\frac{\xi}{p}+\frac{\xi'}{p'}+1=0, \text{ eller } \frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1. \tag{6 a}$$

Ytterligare är

$$\varkappa^2=\frac{f}{f'}\cdot\frac{x'}{x} \text{ och enligt (5 a) } \frac{x'}{f'}=\frac{f}{x};$$

alltså

$$(\pm)\varkappa = \frac{x'}{f'} = \frac{f}{x}, \qquad (8\,b)$$

där det negativa tecknet för $\varkappa$ måste väljas, enär $x' = -f' = \xi'$ skall göra $\varkappa = +1$.

Det gives två slag av konjugerade axelavstånd. Det ena äro sådana, vilkas alla punkter äro inbördes konjugerade. De hava städse lika tecken, avmätta från konjugerade ändpunkter och falla helt utanför brännpunkterna. Hittills utförda betraktelser gälla sådana, helt eller fullständigt konjugerade sträckor. I det andra slaget konjugerade axelavstånd äro endast ändpunkterna, men intet punktpar inom sträckorna konjugerade. Inom dem falla brännpunkterna, och sträckorna hava olika tecken, om de avmätas från konjugerade ändpunkter. Skrives en objektsträcka $x_2 - x_1$, så ha x_1 och x_2 i en sådan av första slaget samma tecken, i en av det andra slaget olika tecken.

Enligt (7) och (3) har man

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{x_1' x_2'}{x_1 x_2} = \frac{(x_2' - x_1')^2}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{x_2'^2 + x_1'^2}{x_2^2 + x_1^2}.$$

Uppenbarligen behålla dessa tre senare uttryck sina värden oförändrade, om här tecknen ombytas för endera x_1 och x_1', eller för x_2 och x_2'. Ej heller ändras därvid $\alpha_1 \alpha_2$, emedan α varierar symmetriskt till brännpunkterna. Fundamentalformeln liksom alla därur härledda gälla sålunda för alla konjugerade avstånd.

Ur sist anförda formler kan bildas en oändlighet andra, varav det enklaste fallet är angivet.

I det »afokala fallet» (kikaren) ligga brännpunkterna i oändligheten, en axelparallell objektstråle motsvaras av en axelparallell bildstråle. Förhållandet mellan deras höjder över axeln betecknar lateralförstoringen, här konstant. Relationerna (2) och (3) ovan, tydligen giltiga även för detta fall, visa att djupförstoringen α och förhållandet $p' : p$ äro

lika och ävenledes konstanta. Konjugerade axelsträckor tillhöra enbart det första av nyss angivna tvenne slag.

En grupp föga beaktade — kanske nya — relationer erhållas, om man betraktar konjugerade axelavstånd $p\ p'$, stående i ett givet, konstant förhållande α_0. Detta senare villkor bestämmer alltså giltighetsområdet för nämnda relationer. Man har först enligt (3):

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_0^2; \qquad (3\text{ a})$$

där α_0 speciellt betyder djupförstoringen i tvenne konjugerade punktpar, med brännpunktsavstånden $x_0 x_0'$, medan $\alpha_1 \alpha_2$ beteckna djupförstoringen i vardera paret ändar av två godtyckliga konjugerade sträckor pp', underkastade ovannämnda villkor.

Enligt (1 a) och (2) är uttrycket

$$\varkappa_1 \varkappa_2 = \frac{\varkappa_1^2}{\alpha_1} \cdot \frac{p'}{p}$$

konstant för alla värden $p\ p'$, som stå i samma förhållande (α_0), och om $\varkappa_0$ är lateralförstoringen i nyss omnämnda par konjugerade punkter, vari djupförstoringen $dp' : dp$ är α_0, så antaga $\varkappa_1$ och $\varkappa_2$ i ändarna av elementen $dp\ dp'$ det gemensamma värdet $\varkappa_0$, alltså

$$\varkappa_1 \varkappa_2 = \varkappa_0^2; \qquad (3\text{ b})$$

$\varkappa_1 \varkappa_2$ sålunda lateralförstoringen i vardera paret ändar av $p\ p'$.

För »konvergensförhållandet» eller »angularförstoringen», $\gamma = v' : v$, gäller

$$\gamma = \frac{\varkappa}{\alpha}, \text{ eller } \frac{\alpha\gamma}{\varkappa} = 1;$$

följaktligen även

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_0^2. \qquad (3\text{ c})$$

Utbytes i (3 a) α mot $-\frac{x'}{x}$, och elimineras sedan x' eller x med hjälp av (5), så följer

$$x_1 x_2 = \pm x_0^2; \quad x'_1 x'_2 = \pm x'^2_0; \tag{3 d}$$

med positivt resp. negativt tecken för första resp. andra slaget av konjugerade avstånd ($x_1 x_2$ av samma resp. motsatt tecken).

Formlerna (3 a) — (3 d) utsäga, att den optiska storhet (α, $\varkappa$, γ, x), som hänför sig till punktparet $x_0 x_0'$ (med djupförstoringen α_0), är medelproportionalen till de två storheter, som hänföra sig till ändpunkterna av konjugerade sträckor $p\,p'$, stående i storleksförhållandet α_0.

Om a betecknar avståndet från brännpunkten till sträckans p ($= x_2 - x_1$) mittpunkt, och man sätter $b = \frac{p}{2}$, så kan (3 *d*) skrivas

$$(a + b)(a - b) = x_0^2;$$

eller

$$a^2 = b^2 + x_0^2; \tag{3 e}$$

samt motsvarande på bildsidan.

Relationerna (3 *d*) och (3 *e*) äga sitt intresse däri, att de hänföra sig endast till det ena av de två medier, mellan vilka avbildningen äger rum. Enligt formel (3 *d*) förhålla sig brännpunktsavstånden $x_1 x_2$, tagna med samma tecken, på samma sätt som konjugerade avstånd vid en sfärisk spegel med brännvidden x_0.

Man har vidare enligt (5)

$$(a + b)(a' + b') = ff';$$
$$(a - b)(a' - b') = ff'.$$

Adderade giva dessa

$$aa' + bb' = ff';$$

subtraherade giva de

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = 0;$$

alltså

$$-\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{p'}{p}=-\frac{x_0'}{x_0}=\alpha_0.$$

Dessa sista relationer äga tillämpning på de skenbara spegelytor eller katadioptriska system, som giva spegelbilderna vid ett optiskt systems ytor. En sådan yta och dess krökningscentrum avbildas nämligen, i ena och andra yttermediet, i tvenne »skenbara» spegelytor och deras krökningscentra. Istället för de katadioptriska system, som uppkasta spegelbilderna i yttermedierna, kunna nämnda skenbara spegelytor betraktas, såsom givande reflexerna genom enkel spegling. De skenbara spegelytornas krökningsradier motsvara pp' i uttrycken ovan, krökningsradiernas mittpunkter d. v. s. de skenbara spegelbrännpunkterna, ligga på avstånden $a\,a'$ från det optiska systemets första resp. andra dioptriska brännpunkt.

Avbildningens hittills formulerade egenskaper avse dess allmän-geometriska förhållanden. Den fundamentala relationen (2) är vunnen utan hänsyn till sättet för avbildningens förverkligande, och oberoende av hur den utfaller. Då den sålunda omfattar alla avbildningsfall, kan det särskilda uttryck, som dess konstant antager för den optiska avbildningen, väntas framgå redan ur det enklaste fallet, avbildningen vinkelrätt genom en plan yta, skiljande två medier med brytningsindices $n\,n'$. Här ser man lätt att $\varkappa = 1$ och $\alpha = n' : n$. Relationen blir sålunda

$$\frac{\alpha}{\varkappa^2}=\frac{n'}{n}=c; \qquad (2\,a)$$

och man har vidare enligt (8 a)

$$\frac{\xi'}{\xi}=\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}. \qquad (8\,c)$$

Elimineras förmedelst (8 b) x och x' i (6) och tillämpas (8 c), så fås, med beteckningarna

$$\frac{n}{p} = A; \quad \frac{n'}{p'} = B; \quad \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = D,$$

$$\varkappa^2 B = A + \varkappa D; \tag{9}$$

Gullstrands formel. ABD benämnas »reducerade konvergenser», D speciellt brytkraften. De mätas i »dioptrier», till det antal som resulterar, då avstånden ($p\ p'\ f\ f'$) mätas i meter.

Ur (3) och (2 a) härledes, med samma beteckningar,

$$\varkappa_1 \varkappa_2 B = {}_{(\pm)}\, A. \tag{10}$$

Positivt tecken måste tagas, emedan detta uttryck måste övergå till (2 a), när p och p' tagas oändligt små. Räknas $p\ p'$ från huvudpunkterna ($\varkappa_1 = 1$), blir uttrycket (10):

$$\varkappa = \frac{A}{B}; \tag{10 a}$$

den vanliga formeln för lateralförstoringen.

Man kan slutligen åter införa avstånd och brytningsindices, taga ett godtyckligt objekt och dess (lika) bild, h_0, i huvudpunkterna, samt sätta

$$\frac{h_0}{p} = v; \quad \frac{h_0}{p'} = v'; \quad \varkappa = h' : h.$$

Då följer

$$n\,h\,v = n'\,h'\,v'; \tag{10 b}$$

Huyghens-Lagranges formel.

Om en andra avbildning följer på en första, så äro båda till sitt slutresultat likvärdiga med en viss enhetlig avbildning, de två avbildande partialsystemen kunna ersättas med ett totalsystem, För att härleda sambandet mellan de tre systemen, må beteckningarna för första och andra partialsystemen förses med indices 1 och 2, medan de för totalsystemet förbli utan index. Totalsystemets båda brännpunkter äro

bilderna i yttermedierna av partialsystemens resp. mellanmediet tillhörande brännpunkter, vilka senares inbördes avstånd må betecknas med σ. Ett enda par, i avseende å totalsystemet konjugerade punkter är a priori bekant, nämligen första partialsystemets första och andra partialsystemets andra brännpunkt. Ty strålar gående mellan dessa punkter äro i mellanmediet parallella med axeln. Dessa två punkters avstånd $s\ s'$ från totalsystemets nyssangivna första resp. andra brännpunkt bestämma totalsystemets läge, och totalsystemet karakteriseras ytterligare av sina brännvidder $f\ f'$. Mellan de fyra bestämningselementen $s\ s'\ f\ f'$ består avbildningsrelationen

$$s\ s' = f\ f'.$$

Samma relation förbinder s och s' med partialsystemens brännvidder samt avståndet σ från det första partialsystemets andra till det andras första brännpunkt:

$$s = \frac{f_1 f_1'}{\sigma}; \quad s' = -\frac{f_2 f_2'}{\sigma}.$$

Ytterligare är lateralförstoringen $\varkappa$ känd i föreliggande konjugerade punktpar. Om ett lineärt objekt tänkes anbragt i mellanmediet på oändligt avstånd, så stå bilderna, som av detta objekt uppkastas i sista och första medierna, i förhållandet $f_2 : f_1'$. Sålunda

$$\varkappa = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Dessutom är

$$\varkappa = -\frac{f}{s} = -\frac{s'}{f'};$$

alltså

$$\frac{f_2}{f_1'} = -\frac{f}{s} = -\frac{s'}{f'}.$$

Enligt uttrycken för $s\ s'$ ovan följer härav

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\sigma}; \quad f' = -\frac{f_1' f_2'}{\sigma}.$$

Om beräkning av logaritmer.

Av NILS KUYLENSTIERNA.

Vid läsningen av lektor HÖSSJERS uppsats om logaritmer i septemberhäftet för 1932 av denna tidskrift kom jag att erinra mig en gammal metod för beräkning av logaritmer, som kan vara av intresse även för skolundervisningen. Metoden har enligt uppgift i WEBER-WELLSTEIN, Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. I, Teubner 1922, använts redan av BRIGGS. Tillvägagångssättet åskådliggöres bäst genom ett exempel.[1]

Det begäres att beräkna log 7 (10-logaritmen). Man bildar suksessivt 2:dra, 4:de, 8:de etc. digniteterna av 7 och skriver var och en av dessa digniteter som en dignitet av 10, multiplicerad med en faktor, som ligger mellan 1 och 10. Vid bildandet av den senare faktorn medtages varje gång ett bestämt antal t. ex. 4 siffror. Man får

$$
\begin{aligned}
7^{2} &= 49 && = 4{,}9 \cdot 10 \\
7^{4} &= 24{,}01 \cdot 10^{2} && = 2{,}401 \cdot 10^{3} \\
7^{8} &= 5{,}765 \cdot 10^{6} \\
7^{16} &= 33{,}26 \cdot 10^{12} && = 3{,}326 \cdot 10^{13} \\
7^{32} &= 11{,}06 \cdot 10^{26} && = 1{,}106 \cdot 10^{27} \\
7^{64} &= 1{,}223 \cdot 10^{54} \\
7^{128} &= 1{,}496 \cdot 10^{108} \\
7^{256} &= 2{,}238 \cdot 10^{216} \\
7^{512} &= 5{,}009 \cdot 10^{432} \\
7^{1024} &= 25{,}09 \cdot 10^{864} && = 2{,}509 \cdot 10^{865} \\
7^{2048} &= 6{,}295 \cdot 10^{1730} \\
7^{4096} &= 39{,}63 \cdot 10^{3460} && = 3{,}963 \cdot 10^{3461} \\
7^{8192} &= 15{,}71 \cdot 10^{6922} && = 1{,}571 \cdot 10^{6923}.
\end{aligned}
$$

[1] Metoden finnes antydd i AGNE WAHLGREN, Algebra och funktionsteori, Kap. 17, Ex. 87 (1:sta uppl.).

Genom logaritmering erhålles härav

$$\log 7 = \frac{6923}{8192} + \frac{\log 1{,}571}{8192}.$$

Sista termen är så liten, att den kan försummas. Utföres divisionen, blir

$$\log 7 = 0{,}84509.$$

5-ställig tabell ger

$$\log 7 = 0{,}84510.$$

Därigenom att vid varje kvadrering blott medtages ett visst antal decimaler, införas fel, som sätta en gräns för beräkningens noggrannhet. Det lönar sig därför ej att utsträcka räkningen längre än att den term, som försummas, blir tillräckligt liten. Här följer en undersökning av storleken av det fel, som begås.

Det tal, vars logaritm skall beräknas, betecknas med a. Vi anta, att $a > 1$ och att a är framställt i decimalbråksform. Vi kunna sätta

$$a = b_0 \cdot 10^{c_0},$$

där $c_0 \geqq 0$ och $10 > b_0 > 1$. Kvadrering ger

$$a^2 = b_0^2 \cdot 10^{2c_0}.$$

Av b_0^2 medtages nu endast ett visst antal av de första siffrorna. Vi få då ett tal b'_1. Det fel, som därvid begås, är en viss bråkdel av b'_1. Vi beteckna det $\delta_1 b'_1$. δ_1 är alltså det s. k. relativa felet. Således blir

$$a^2 = b'_1 (1 + \delta_1) \cdot 10^{2c_0}.$$

Är nu $b'_1 < 10$, så taga vi bort accenten och sätta

$$a^2 = b_1 (1 + \delta_1) \cdot 10^{c_1}, \qquad (2c_0 = c_1). \tag{1}$$

Är däremot $100 > b'_1 > 10$, så skriva vi

$$a^2 = \frac{b'_1}{10} \cdot (1 + \delta_1) \cdot 10^{2c_0+1}.$$

Vi sätta här

$$\frac{b'_1}{10} = b_1, \qquad 2c_0 + 1 = c_1$$

och återfå då (1). Det bör observeras, att i båda fallen är relativa felet δ_1 av samma storleksordning. Genom upprepade kvadreringar av (1) får man p. s. s.

$$a^{2^2} = b_2 (1 + \delta_1)^2 \cdot (1 + \delta_2) \cdot 10^{c_2},$$
$$a^{2^3} = b_3 (1 + \delta_1)^4 \cdot (1 + \delta_2)^2 \cdot (1 + \delta_3) \cdot 10^{c_3},$$
$$- - - - - - - - - - - - -$$
$$a^{2^s} = b_s (1 + \delta_1)^{2^{s-1}} \cdot (1 + \delta_2)^{2^{s-2}} \ldots (1 + \delta_s) \cdot 10^{c_s}.$$

Logaritmering ger

$$\log a = \frac{c_s}{2^s} + \frac{\log b_s}{2^s} + \frac{1}{2} \log (1 + \delta_1) + \frac{1}{4} \log (1 + \delta_2) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^s} \log (1 + \delta_s).$$

Utvecklas $\log (1 + \delta_1)$ etc. efter digniteter av δ_1 etc., erhålles

$$\log a - \frac{c_s}{2^s} = \frac{\log b_s}{2^s} + \log e \cdot \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{4} + \frac{\delta_3}{8} + \ldots + \frac{\delta_s}{2^s} \right) + R_s, \quad (2)$$
$$(\log e = 0{,}4343),$$

där termen R_s, som är beroende av 2:dra och högre digniteter av felen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$, är så liten, att den kan försummas. Av formeln (2) framgår, att felet vid beräkningen av $\log a$ är beroende först av termen $\frac{1}{2^s} \cdot \log b_s$, vilken kan göras hur liten som helst, om blott räkningen föres tillräckligt långt, så att s blir tillräckligt stort. Vidare inverka felen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ vilka uppkomma därigenom, att vid kvadreringarna ett antal decimaler strykas. Som kunde förutses inverka mest de fel, som göras vid räkningens begynnelse.

Med hjälp av formeln (2) kan man göra en uppskatt-

ning av, dels hur många decimaler, som kunna borttagas vid kvadreringarnas utförande, dels hur många kvadreringar, som skola göras, för att man skall få log a beräknad med en viss önskad noggrannhet. För att hålla oss till det fall, som är av mest betydelse för skoländamål, anta vi, att log a skall beräknas med 4-ställig noggrannhet, att felet alltså ej får överstiga 0,00005.

Emedan $2^{13} = 8192$, $2^{14} = 16384$, så räcker det alltefter värdet på b_s i regel med 13 eller 14 kvadreringar (undantagsvis 15). Av formeln (2) framgår vidare, att man får den önskade noggrannheten, om man beräknar b_1, b_2, b_3 och b_4 med 5 korrekta siffror, b_5, b_6, b_7 med 4 korrekta siffror samt b_8 och de följande med 3 eller de allra sista med ännu färre siffror. Ty då befinnes

$$\log e \cdot \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{4} + \ldots + \frac{\delta_s}{s}\right)$$

vara numeriskt mindre än

$$0{,}00005 \cdot 0{,}4343 \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{10}{32} + \tfrac{10}{64} + \tfrac{10}{128} + \tfrac{100}{256} + \tfrac{100}{512} + \ldots\right) =$$
$$= 0{,}00005 \cdot 0{,}4343 \cdot 2{,}27 = 0{,}00005 \cdot 0{,}986 < 0{,}00005.$$

Om metoden skall användas vid skolundervisningen, är det emellertid av vikt, att räknearbetet blir så lätt som möjligt. Inskränker man sig till att beräkna b_1 och b_2 med 5 korrekta siffror, b_3, b_4, b_5 med 4 korrekta siffror och de återstående med 3 siffror, så blir enligt formel (2) maximala felet 0,000132. Det verkliga felet håller sig i allmänhet betydligt under denna gräns. Författaren har beräknat åtskilliga exempel, och i dem alla har felet varit numeriskt mindre än 0,00005.

Lektor AGNE WAHLGREN har givit författaren det goda förslaget att låta klassens elever slå sig ihop två och två om samma tal och beräkna den ene ett undre, den andre ett övre gränsvärde för log a genom att konsekvent avrunda uppåt, resp. nedåt vid kvadreringarnas utförande. Det torde dock i detta fall ofta vara lämpligt att utföra 15 kvadreringar. Detta ökar inte arbetet så mycket, ty vid alla

de kvadreringar, då man behöver få endast tre siffror i svaret, kan man med fördel använda de vanliga kvadrattabellerna. Om exempelvis $a = 104$, erhålles, om räkningen utföres på föreslaget sätt

$$2{,}02 \cdot 10^{66096} > 104^{32768} > 3{,}15 \cdot 10^{66091}.$$

Härav följer

$$10^{66097} > 104^{32768} > 10^{66091},$$

$$2{,}01712 > \log 104 > 2{,}01693.$$

I det valda exemplet börja a^8, a^{64} och a^{128} alla med siffran 1, i vilket fall man a priori kan vänta, att metoden ger mindre noggrant resultat än eljest. Önskar man, att skillnaden mellan gränserna skall bli ännu mindre, kan man vid bildandet av b_3, b_6 och b_7 medtaga en siffra mer än eljest, i händelse a^8, a^{64} eller a^{128} börjar med siffran 1 eller någon av de båda förra med siffran 2.

Ett närmevärde för π-talet.

Herr Artur Heiseler har meddelat (Commentat. Soc. Sci. Fenn. V, 1931), att han tillfälligtvis funnit, att uttrycket $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3{,}141617\ldots$ utgör ett gott närmevärde för $\pi = 3{,}141592\ldots$ Med Heiselers approximation uppgår först vid en radie av mer än 8 meter felet i halvcirkeln till 0,2 mm.

Uttrycket är lätt att hålla i minnet på grund av siffrornas valör och ordningsföljd. Man har ju samma siffror i samma ordningsföljd som i talet 3,1416.

T. Edqvist.

Potenssatsen för kägelsnitt.

Av AGNE WAHLGREN.

I sin tredje bok om kägelsnitten, satserna 17—23, visar Apollonius den s. k. potenssatsen för kägelsnitt: Om två kordor (eller sekanter) till ett kägelsnitt skära varandra, blir förhållandet mellan rektanglarna av deras delar konstant, när kordorna förflyttas med bibehållande av sina riktningar. Ett elementärt analytiskt bevis för satsen är följande:

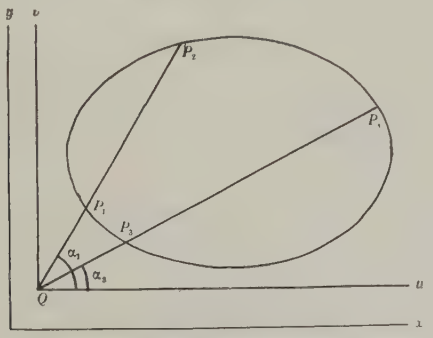
Kägelsnittets ekvation är

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Kordor äro dragna genom punkten $Q = (x_1, y_1)$, bildande vinklarna α_1 och α_3 med x-axeln; vinkelkoefficienterna äro k_1 och k_3. Det skall visas, att

$$\lambda = \frac{QP_1 \cdot QP_2}{QP_3 \cdot QP_4} = \text{konst.},$$

om α_1 och α_3 äro konstanta och x_1, y_1 varierar.



Origo flyttas till punkten Q genom substitutionen

$$x = u + x_1 \,;\, y = v + y_1.$$

Då övergår ekv. (1) till

$$Au^2 + Bv^2 + Gu + Hv + K = 0. \qquad (2)$$

Här äro koefficienterna för andragradstermerna oförändrade, men G, H och K äro funktioner av x_1 och y_1. Vi skola finna, att dessa senare koefficienter försvinna ur uttrycket för λ. Om $QP_i = r_i$ och $P_i = (u_i, v_i)$, blir $r_i = u_i : \cos \alpha_i$. Väljes $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_4$, måste det ena r-värdet räknas negativt, när punkterna P ligga på var sin sida om Q. Nu erhålles:

$$\lambda = \frac{u_1 u_2}{u_3 u_4} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_3}{\cos^2 \alpha_1}.$$

Ekvationen för QP_1 är $v = k_1 u$. Insättes detta i ekv. (2), erhålles:

$$(A + Bk_1^2)u^2 + (G + Hk_1)u + K = 0;$$

$$\therefore\ u_1 u_2 = \frac{K}{A + Bk_1^2}. \qquad (3)$$

På samma sätt erhålles:

$$u_3 u_4 = \frac{K}{A + Bk_3^2}. \qquad (4)$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{A + Bk_3^2}{A + Bk_1^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_3}{\cos^2 \alpha_1} = \frac{A \cos^2 \alpha_3 + B \sin^2 \alpha_3}{A \cos^2 \alpha_1 + B \sin^2 \alpha_1} = \text{konst.}$$

Enligt vad som sagts om tecknet för r, blir λ alltid positivt vid en ellips. Men för en hyperbel blir λ negativt, om den ena kordan endast skär den ena grenen men den andra skär båda. För två konjugathyperbler erhålles samma λ-värde för givna kordriktningar, eftersom A och B ha samma värde i bådas ekvationer.

Om kordorna höra till var sin av konjugathyperblerna, blir λ *ej* konstant. Men vi skola beräkna λ-värdet λ_0 för medelpunkten. Då blir ekv. (2) för de båda hyperblerna:

$$Au^2 + Bv^2 + K = 0,$$
$$Au^2 + Bv^2 - K = 0.$$

Om P_1 och P_2 ligga på den förra hyperbeln, blir ekv. (3)

oförändrad (bortsett från att K har fått ett nytt värde), men i ekv. (4) utbytes K mot $-K$. Då får man:

$$\lambda_0 = -\lambda .$$

Koroll. 1. Om i en ellips kordornas riktningar anges av två konjugatdiametrar med längderna $2d_1$ och $2d_2$, vilka väljas till koordinataxlar i ett snedvinkligt koordinatsystem, och satsen tillämpas på den ena diameterns punkter och medelpunkten, erhålles:

$$\frac{y^2}{(d_1 + x)\,(d_1 - x)} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2},$$

varav:

$$\frac{x^2}{{d_1}^2} + \frac{y^2}{{d_2}^2} = 1.$$

Koroll. 2. Om vid två konjugathyperbler två konjugatdiametrar ha längderna $2d_1$ och $2d_2$ och för den ena hyperbeln satsen tillämpas på transversalaxelns punkter och medelpunkten, erhålles:

$$\frac{-y^2}{(x + d_1)\,(x - d_1)} = \lambda = -\lambda_0 = -\frac{{d_2}^2}{{d_1}^2},$$

varav:

$$\frac{x^2}{{d_1}^2} - \frac{y^2}{{d_2}^2} = 1.$$

För den andra hyperbeln erhålles:

$$\frac{(y + d_2)\,(y - d_2)}{-x^2} = \lambda = -\lambda_0 = -\frac{{d_2}^2}{{d_1}^2},$$

varav:

$$\frac{x^2}{{d_1}^2} - \frac{y^2}{{d_2}^2} = -1.$$

Om sannolikhetsräkning i skolan.

Av HENRIK PETRINI.

Byråchefen E. GÖRANSSON har i denna tidskrift (1930: 4; 1931: 1, 2, 3; 1932: 1, 2, 3) publicerat en avhandling »Sannolikhetsräkning på empirisk grundval», som huvudsakligen utgör en framställning av den matematiska teorin för statistiken, en sak som det kan vara nyttigt för läraren att känna till, och varav ett och annat kan lämpa sig för mer intresserade lärjungar. Men förgäves söker jag efter det jag anser vara av ett mer allmänt intresse, nämligen en i åskådlig bild gjord framställning av de stora talens lag. I och för denna luckas fyllande tar jag mig friheten hänvisa till C. V. L. CHARLIER »Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik», Lund 1920, s. 63—67, där det uppvisas åskådligt, hur det empiriska resultatet alltmer närmar sig normalkurvan, ju mer elementens antal ökas.

Medan hr G. inte tycks ha någonting emot att de svårare delarna av hithörande område och de tekniska tillämpningarna därav meddelas i skolan,[1] så polemiserar han däremot på flera ställen emot att man i skolan tar upp de mera elementära delarna av sannolikhetskalkylen, och då han därvid direkt vänder sig mot vad jag haft att säga i frågan (1931: 2), så anser jag mig böra närmare granska hans framställning.

En gammal god regel lyder: »man måste lära sig krypa, innan man kan gå», och redan därför bör man börja ett

[1] Läsaren hänvisas till byråchefen G:s uppsatser, i vilka han utförligt motiverar sin uppfattning att sannolikhetsräkning *ej* bör upptagas i skolans kursplan. Denna liksom andra punkter i lektor PETRINIS uppsats komma att belysas och bemötas av hr. G. i ett kommande nummer av tidskriften. *(Red.)*

nytt område med de enklaste uppgifterna. Dessutom är det av vikt för allmänbildningen att få en uppfattning om den historiska utvecklingen av det gebit man sysslar med, och mycket träffande har TODHUNTER kallat sitt digra arbete om probabilitetskalkylen för en »historia».

I den av mig anf. st. omnämnda kursen i sannolikhetskalkyl (5 nov.—8 dec. 1885) framhöll professor DAUG betydelsen av åtskillnaden mellan subjektiv och objektiv sannolikhet. Hr G:s bristande förståelse för sannolikhetsbegreppets införande i skolan torde bottna i den totala frånvaron av all tanke på denna åtskillnad, såsom framgår av det utan all reservation framkastade påståendet, att sannolikheten för att en viss siffra skall komma upp vid ett tärningskast inte skulle vara $= \frac{1}{6}$ om tärningen är falsk. För den som blir lurad är den subjektiva sannolikheten naturligtvis $= \frac{1}{6}$.

För min del räknar jag det som ett betydande uppfostrande moment, att ungdomen får någon övning i att bedöma det okända såsom mer eller mindre sannolikt. Ty på ett sådant bedömande beror i själva verket allt mänskligt handlande, ja, man kan säga, att allt organiskt liv är beroende av slumpen och dess lagar.

Den »klassiska» metoden behandlar endast sådana problem, där de olika möjligheterna a priori fattas såsom lika möjliga. Nu söker hr G. med ett par geometriska exempel uppvisa »olämpligheten av att uppbygga sannolikhetsberäkningen på antagandet om gynnsamma och lika möjliga fall». Han finner nämligen till sin överraskning, att man får olika resultat »allteftersom man vid olika val av variabler antager sannolikhetsintensiteten vara konstant» (32:3 s. 135). Det har i dessa problem varit fråga om dubbelintegraler, men när man byter ut variablerna mot andra, så får man inte glömma bort funktionaldeterminanten, och det är det, som tydligen är gjort i det citerade uttrycket.

I det utförda exemplet (om nålproblemet) är den ena räkningen riktig, men den andra saknar den nämnda funktionaldeterminanten, och resultatet blir då naturligtvis orik-

tigt. Sådana felaktiga resultat fås, om man felaktigt bedömer vad som a priori är att fatta som lika möjligheter, något som helt och hållet beror på uppgiftens natur. I detta exempel är ju den saken alldeles självklar.

Efter nålproblemet omnämner hr G. »den bertrandska paradoxen», ett problem, där man också kommer till olika resultat på olika vägar. Här är felet inte så uppenbart som i fråga om nålproblemet, men vid en närmare granskning finner man, att man vid de olika lösningarna i själva verket har behandlat olika uppgifter, som sammanblandats på grund av oklarhet i formuleringen. Problemet är i och för sig mycket intressant, och genom diskussionen därav får man en klarare insikt i hithörande frågors natur.

Behandlas den geometriska sannolikheten på ett rätt sätt, så upplösa sig alla paradoxer, och man kan till och med använda sannolikhetsräkningen till att på ett enkelt och åskådligt sätt härleda allmänna geometriska satser, som endast med svårighet låta bevisa sig med vanliga analytiska hjälpmedel. Jag vill därvidlag endast erinra om CROFTONS berömda integralformler.

Av fundamental betydelse för sannolikhetskalkylens tillämpningar, särskilt statistiken, är GAUSS' felkurva. Då härledningen av denna kurvas ekvation bygger på den klassiska sannolikhetskalkylen, så har hr G. sett sig nödsakad att härleda denna på annat sätt, och han meddelar en egen alldeles ny härledning därav på rent »empirisk grundval» (30: 2, s. 8).

Genom studium av en mängd laborationsförsök får han fram en felkurva, som skär den positiva y-axeln vinkelrätt i maximipunkten, och som har x-axeln till asymptot utan att skära den. Nu bildar han subtangenten till en rörlig punkt på kurvan, och så kommer själva klämmen i hela avhandlingen:

> av figuren inses, att subtangenten närmar sig värdet ∞, då x närmar sig 0, men däremot synes avtaga då x

växer. Den enklaste funktion, som har denna egenskap, är $\frac{a}{x}$. Alltså kan man antaga, att subtangenten är $= \frac{a}{x}$.

Härpå deduceras kurvans ekvation ur den sålunda funna ekvationen för subtangenten.

Det är nu meningen, att denna härledning skall meddelas lärjungarna i skolan (s. 77), men mot en så löslig undervisning vill jag inlägga min bestämdaste protest. Varför skall just subtangenten, som eljest inte ens omnämnes, spela en så avgörande roll vid diskussionen av kurvan, att just den skall ha »den enklaste formen?»

Nu gäller det för *alla* kurvor som skära y-axeln vinkelrätt, att subtangenten närmar sig ∞, då x närmar sig 0, och härav följer naturligen, att subtangenten avtar i närheten av nollpunkten. Hela resonemanget är således absolut värdelöst.

På sin höjd kan det tjäna som en varning för läraren att inlåta sig på alltför ytlig hevristik vid undervisningen.

På åtskilliga ställen i sin avhandling har hr G. infört en i matematiken hittills okänd rent humanistisk bevisningsmetod, nämligen hänvisning till auktoritetstron. Det något lättfärdiga sätt varpå han söker avfärda min hänvisning till sannolikhetskalkylens betydelse för den matematiska fysiken (32:2 sid. 74) vill jag nöja mig med att avfärda med samma bevisningsmetod och hänvisar då till ett yttrande av professor C. W. Oseen i en uppsats om *Empirismen och sannolikhetsbegreppet:*

> »sannolikhetsbegreppet är grundbegreppet i våra dagars fysik» (Spektrum 1932:2, s. 57).

En aritmetisk fråga.

Av S. WIGERT.

Ett gammalt läroboksproblem lyder så: I huru många lika stora delar skall ett (positivt) tal delas, för att deras produkt skall bli så stor som möjligt?

Om talet är a, och x betyder en kontinuerlig variabel, så visas först, att funktionen $\left(\frac{a}{x}\right)^x$ har sitt maximum för $x = \frac{a}{e}$, där e är de naturliga logaritmernas bas. När a är en heltalig multipel av e, t. ex. $n\,e$, blir således svaret, att delarnas antal bör vara n, och den största möjliga produkten är $= e^n$. I annat fall har har man $n < \frac{a}{e} < n+1$, och frågan blir, vilket som är störst av talen $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ och $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$. Man kunde då vara frestad att tro, att detta är detsamma som att fråga, vilket av talen n och $n+1$, som ligger närmast $\frac{a}{e}$. Fullt så enkel är likväl icke saken. Låt oss först antaga, att $\frac{a}{e}$ ligger närmast $n+1$ eller mitt emellan $n+1$ och n. Då är alltså $a \geqq \frac{2n+1}{2}\,e$. Nu kan man visa,[1] att e icke blott är gränsvärdet för $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, då $n \to \infty$, utan att även

$$\frac{2n+2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{2n+1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

[1] PÓLYA und SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd 1, s. 31.

Således blir $a \geqq \frac{2n+1}{2} e > \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ och

$$\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

I detta fall ligger ju saken som man kunde vänta. Men däremot gäller *icke* i allmänhet, att $\left(\frac{a}{n}\right)^n > \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$, ifall $\frac{a}{e}$ ligger närmare n än $n+1$. Ty antag, att a är ett tal av formen $\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p}$, där p är ett helt tal.

Då är $\frac{a}{e} = \frac{p+1}{e}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ och (enl. (1))

$$1 - \frac{1}{2p+2} > \left(1+\frac{1}{p}\right)^p \frac{1}{e} > 1 - \frac{1}{2p+1}, \quad \text{så att}$$

$$p + \frac{1}{2} > \frac{a}{e} > p + 1 - \frac{p+1}{2p+1} > p.$$

Här blir alltså $n = p$, och $\frac{a}{e}$ ligger närmare n än $n+1$, men vi ha $\left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$. Det bör därför finnas talvärden a, för vilka $\frac{a}{e}$ ligger närmare n, ehuru $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{a}{n}\right)^n$. Detta bekräftas av exemplet $a = \frac{19}{2}$, där $3 < \frac{a}{e} < 3{,}5$ och $\left(\frac{19}{8}\right)^4 > \left(\frac{19}{6}\right)^3$. Man kan t. ex. visa, att $\frac{a}{e} - n < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ är ett tillräckligt ehuru ej nödvändigt villkor, för att man skall ha $\left(\frac{a}{n}\right)^n > \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$, men en fullständig utredning av frågan vore nog av intresse.

Det hydrostatiska tryckets behandling vid problemlösningen å gymnasiet.

Av RAGNAR LUNDBLAD.

Vårterminens studentskrivning började med ett problem, där det hydrostatiska trycket skulle behandlas som punktfunktion, och slutade med ett problem, där den elektriska potentialen skulle behandlas som punktfunktion. Den första uppgiften var i grunden mindre komplicerad än den sista. Men för abiturienterna var nr. 8 ett lätt problem, nr. 1 ganska svårt.

För tjugu år sedan skulle troligen det sista problemet ha vållat stort manfall, lika stort som det första nu. Att abiturienterna numera verkligen veta en del om elektrisk potential, beror troligen i icke ringa grad på det senaste årtiondets studentproblem. Dessa ha otvivelaktigt på ett gynnsamt sätt påverkat undervisningen. Det hydrostatiska trycket är däremot ännu insvept i det mollska töcknet.

För några år sedan gav jag vid en skolskrivning ett problem av ungefär följande lydelse:

1. Ett glasrör är två gånger böjt i rät vinkel, så att det består av två vertikala skänklar med ett horisontellt mellanstycke. I röret finnes kvicksilver. Dock är kvicksilverpelaren avbruten av en luftpelare, vilken befinner sig i den horisontella delen. Luftens volym är 1,8 cm^3, dess tryck 77 cm. Nu ifylles i båda skänklarna mera kvicksilver, så att kvicksilverytorna komma 33 cm högre än förut. Hur stor blir då luftpelarens volym?

Uppgiften har vissa svagheter, som här ej behöva avhandlas. Lösningen är en enkel tillämpning av Boyles lag

$$1{,}8 \,.\, 77 = V \,.\, 110 \;\therefore\; V = 1{,}26 \text{ cm}^3.$$

Nu visade det sig, att lärjungarna i större utsträckning än jag väntat togo fel på trycket. Och det var ganska naturligt. Följer man i sin undervisning Molls lärobok, blir för lärjungarna vätsketrycket ingenting annat än den kraft som verkar på begränsningsytan av ett kärl. Luftpelaren är utsatt för *två* kvicksilverpelare, alltså var dess tryck

$$77 + 2 \,.\, 33 = 143 \text{ cm!}$$

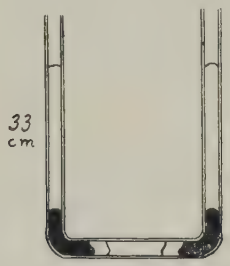


Fig. 1.

Men kraft och tryck är inte samma sak. De ha olika dimensioner. Trycket mätes i gf/cm^2 eller i atm, kraften i gf. Och trycket är i varje punkt av vätskan en väldefinierad ortsfunktion, som kan diskuteras utan att man behöver tänka på krafterna på kärlets väggar.

Vid undervisningen måste man naturligtvis först av allt skilja på kraft och tryck. Ohlon [1] inför i detta syfte termerna tryckkraft och tryck och sambandet tryckkraften = = trycket $\times$ ytan. Pohl [2] ger några utmärkta exempel: »Man underskattar gärna de tryck, som förekomma i det dagliga livet. Ett finger, som är skyddat med fingerborg, kan lätt åstadkomma kraften 1 kgf. Har nålspetsen diame-

[1] Sven E. Ohlon, Lärobok i fysik, del I, sid. 49, Stockholm 1924.
[2] R. W. Pohl, Mechanik und Akustik, p. 120, Berlin 1930.

tern 0,2 mm, blir dess tvärsnitt av storleksordningen $4 \cdot 10^{-4}$ cm^2, och nålspetsen inträngер då i det föremål som genomstickes med ett tryck av i runt tal

$$\frac{1 \text{ kgf}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2} = 2\,500 \text{ kgf/cm}^2 = 2\,500 \text{ atm.}$$

En rakkniv skär genom skäggstubben med ett tryck av några tiotusentals atmosfärer. Man skall inte låta trycket imponera på sig, utan produkten tryck gånger yta.»

Det räcker dock inte med att begreppen på detta sätt införas. Väljes vid problemlösningen en olämplig metod, flyta de åter ihop. Problemlösningen bör läggas så, att begreppet hydrostatiskt tryck så mycket som möjligt frigöres från associationen med kärlets väggar. Ett exempel må närmare precisera vad som åsyftas. Vi välja ett studentexempel, givet v. t. 1902.

2. En cylindrisk dykarklocka med platt tak har en inre höjd av 2,5 m. Denna klocka nedsänkes i havet så djupt, att dess undre kant kommer 8 m under havsytan. Barometerståndet är 74 cm. Huru högt stiger vattnet upp i klockan? Havsvattnets egentliga vikt är 1,02, kvicksilvrets 13,6.

I det ögonblick, då nedsänkningen skall börja, innesluter dykarklockan $2{,}5 \cdot a$ m^3 luft, där a är genomskärningsytan i m^2. Trycket är 74 cm kvicksilver $= 13{,}6 \cdot 74$ gf/cm^2.

Vi antaga nu, att vattnet inträngер x m i klockan. Gasmassans volym blir då $(2{,}5 - x)\,a$ m^3. För bestämning av dess tryck kunna två metoder tänkas.

Första metoden. Vi betrakta 1 cm^2 av vattenytan i klockan. På detta ytelement verkar *nedåt* den instängda luftens tryckkraft och *uppåt* dels atmosfärens tryckkraft, vilken enligt Pascals princip fortplantas genom vattnet, och dels vattnets tryckkraft, vilken är lika med tyngden av en vattenpelare, vars höjd är lika med ytans djup under den fria vätskeytan och vars bas är 1 cm^2. Då ytan är i jämvikt, måste den instängda gasens tryck vara

$$\left(13{,}6 \cdot 74 + 1{,}02\,(8 - x) \cdot 100\right) \text{ gf/cm}^2.$$

Av Boyles lag följer då

$$13{,}6 \,.\, 74 \,.\, 2{,}5\, a = \left(13{,}6 \,.\, 74 + 1{,}02\,(8 - x)\,100\right) .\, (2{,}5 - x)\, a.$$

$$\therefore\ x = 1{,}03.$$

Denna metod är utan tvivel lättbegriplig, men den leder bort uppmärksamheten från det väsentliga. Den kommer lärjungarna att identifiera tryck med kraft.

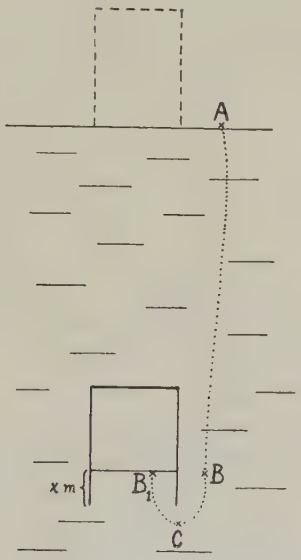


Fig. 2.

Andra metoden. För att framställa saken så konkret som möjligt tänka vi oss, att en dykare stiger ned för att undersöka trycket. Han har med sig en passande manometer — i tanken kunna vi göra den hur liten som helst. När dykaren stiger ned, ser han trycket växa, när han går upp, kan han avläsa huru trycket lättar. Vi antaga nu, att manometern följer banan $ABCB_1$ (fig. 2). I A visar manometern lufttrycket, 74 cm Hg. När dykaren hunnit till B, avläser han ett större tryck, 74 cm kvicksilverpelare + $(8 - x)$. 100 cm havsvattenpelare

$$= 74 + \frac{(8 - x)\,100 \,.\, 1{,}02}{13{,}6} \text{ cm kvicksilver.}$$

När dykaren går vidare längs banan BCB_1, ser han först trycket växa (till C); därpå avtager det och återtager i B_1 samma värde som i B. Ekvationen blir i detta fall

$$74 \,.\, 2{,}5\, a = \left(74 + \frac{(8 - x) \,.\, 100 \,.\, 1{,}02}{13{,}6}\right) . (2{,}5 - x)\, a \quad \therefore \; x = 1{,}03.$$

Ekvationen har blott obetydligt förändrats, men det är inte längre de på begränsningsytorna verkande krafterna

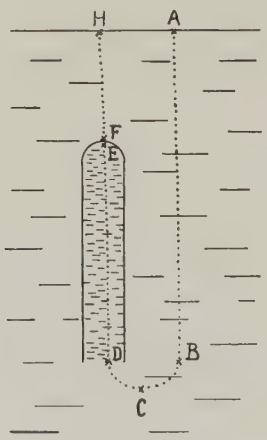


Fig. 3.

som tilldraga sig uppmärksamheten utan själva trycket, mitt inne i vätskan, var som helst i vätskan. Med andra ord, metoden tvingar lärjungarna att tänka sig trycket som en ortsfunktion, vilken de följa från punkt till punkt.

Ganska snart kan man rensa resonemanget från de pedagogiska utläggningarna.

3. Ett tunnväggigt provrör har placerats upp och ned i ett kärl med vatten. Från början är provröret helt och hållet fyllt med vatten, men man låter bensin av spec. vikten

0,7 genom ett böjt rör underifrån inströmma i provröret, tills detta är fullt med bensin. Provrörets botten befinner sig 10 cm och dess öppna ända 29 cm under vattenytan. Huru stort är trycket strax ovanom och strax under provrörets botten? Åt vilket håll sätter sig provröret i rörelse, om det släppes?

Vi studera tryckets variationer utefter banorna ABCDE och HF (fig. 3). Från A till B växer trycket med 29 gf/cm^2. Det växer ytterligare från B till C men avtager från C till D och återtager där samma värde som vid B. Från D till E avtager trycket med 19 cm bensinpelare. Trycket i E överstiger således trycket i A med

$$29 - 0{,}7 \cdot 19 = 15{,}7 \text{ gf/cm}^2.$$

Utefter banan HF växer trycket och är vid F 10 gf/cm^2 större än vid H.

Trycket är således större strax under provrörets botten än strax ovanom densamma, och provröret flyter alltså upp, om det inte är för tungt. (Jfr Pohl, sid. 126 och 142.)

Det synes mig åtminstone sannolikt, att abiturienterna skulle gått bättre i land med den fatala uppgiften nr 1, om de varit vana behandla det hydrostatiska trycket på det sätt ovan skisserats, och i varje fall skulle det då inte inverka, »att vattnets spec. vikt inte var uppgiven».

Men detta är dock en bisak. Det väsentliga är, att lärjungarna få en konkret och grundläggande föreställning om en fysikalisk punktfunktion. När de sedan ställas inför sådana begrepp som den elektriska potentialen och den potentiella energien, visar det sig nog, att arbetet ingalunda varit bortkastat.

Om galvanisk förkromning.

Av BROR GUSTAVER.

Under de senaste åren har galvanisk förkromning blivit allt vanligare som rostskyddsmedel för metalldelar, utsatta för inverkan av luft och vatten, såsom på cyklar, motorcyklar och bilar. Orsaken härtill är krommetallens överlägsna beständighet mot vatten och syre, vilken beror på en egendomlig passivitet, som icke står i överensstämmelse med metallens plats i den elektrolytiska spänningsserien, där ju krom står före zink. Krom ingår som en viktig beståndsdel i rostfritt stål. Ännu större är naturligtvis kromens rostskyddande förmåga i ren form som metalliskt överdrag på järn.

Förkromningen sker på två olika sätt. Vanligen överdrager man först metalldelen, som skall förkromas, med koppar på galvanisk väg, därefter med nickel och till sist med ett tunt lager av krom, endast några tusendels millimeter. Enligt den andra metoden förkromas direkt på kopparöverdraget, då med ett jämförelsevis tjockt skikt, cirka 0,1 mm. I båda fallen använder man sig av ett mellanskikt av koppar, som lätt legerar sig med de flesta metaller. Det praktiska utförandet av förkromningen är icke lätt och fordrar den allra största noggrannhet, om man vill ha ett gott resultat.

Under det man vid alla andra galvaniska metallutfällningar har anodplattor av metallen i fråga, använder man vid förkromningen ej metallisk krom som anod. Härtill har man blyplattor, som äro legerade med järn, troligen för att de skola få större hårdhet och hållfasthet. All utfälld

metall tages därför ur badet, som under elektrolysens gång således blir fattigare på krom. Elektrolyten utgöres av kromsyra, som föres i handeln i smält och krossat tillstånd under olika namn. Badets temperatur skall vara 50 à 55°, spänningen 3,5 à 4 volt och strömtätheten cirka 20 ampère per dm^2. Anodytan bör vara ung. hälften av katodytan, och till förebyggande av oxidation på ytan av de föremål, som skola förkromas, bör spänningen vara pålagd på badet, så att elektrolysen börjar i samma ögonblick, som metalldelen sänkes ned däri. Vid elektrolysen bildas syre vid anoden och väte vid katoden. Gasutvecklingen är mycket livlig och gasblåsorna föra med sig kromsyrestänk, så att luften i badets omgivning blir farlig att inandas. Antingen måste därför elektrolysen utföras under gott avdrag eller också gjuter man ovanpå badet ett 2 à 3 cm tjockt lager av en vätska, som kvarhåller kromsyran. Denna s. k. kromprotekt består av fotogen, uppblandad med någon tillsats, som är försäljarens hemlighet. På anodplattorna erhålles en rödgul beläggning av blybikromat, som enklast avlägsnas med stark saltsyra. Kromutfällningen blir, om metalldelarna äro väl rengjorda och polerade samt alla föreskrifter noggrant iakttagas, vackert glänsande med en vit något blåaktig färgton. Förkromning enligt den första metoden sker på 4 à 5 min.; skall kromskiktet, enligt den andra metoden, ha större tjocklek, tar utfällningen ett par timmar i anspråk. På grund av den avsevärda tidsskillnaden föredrar man, som redan nämnts, den förra metoden, som minskar risken för dels bildning av giftgaser, dels störningar orsakade av beläggningen på anodplattorna.

De kemiska reaktionerna vid elektrolysen kunna anses vara följande.

Anoden: a) $Cr_2O_7 + H_2O = H_2Cr_2O_7 + O$
b) $Cr_2O_7 + Pb = PbCr_2O_7$.

Katoden: a) $H_2 + \frac{1}{3} CrO_3 = H_2O + \frac{1}{3} Cr$
b) Vätejonerna avge sina laddningar och väte går bort i gasform.

Det är helt naturligt, att varje skolpojke, som är lycklig ägare av en förkromad cykel, skulle tycka, att det vore synnerligen intressant att på kemilaboratoriet kunna förkroma t. ex. ett kopparbleck. Av det ovanstående framgår, att det ej är någon lätt sak att lyckas därmed, men följer man nedanstående recept, garanteras för resultat; förf. har på detta sätt upprepade gånger förkromat koppar och alltid lyckats.

I en bägare av 200 cm^3 rymd löser man i 100 cm^3 vatten 50 g teknisk kromtrioxid, CrO_3. Därtill sättes några droppar utspädd svavelsyra (är dock troligen obehövligt). En 2 cm bred remsa blyplåt slipas ren med fint smärgelpapper, tvättas och torkas. Vill man ha kopparblecket förkromat på båda sidor, måste man ha två blyanoder, som kopplas till varandra (goda kontakter) och förenas med strömkällans positiva pol. Kopparblecket, som skall förkromas, bör vara 4 cm brett och putsas omedelbart före neddoppningen i badet med oxalsyra och tungspat, sköljes noga i vatten, därefter i stark natron- eller kalilut och till sist i rent vatten. Kromsyrelösningen värmes till 55° och övergjutes i bägaren med 2 à 3 cm fotogen. Anoderna ställas ned mitt emot varandra i bägaren, strömmen släppes på och man nedför kopparblecket. Efter minst 5 min. tas det upp, spolas av och tvättas under vattenledningen. Som strömkälla använder man likström från belysningsledningen med t. ex. koltrådsglödlampor inkopplade som motstånd. Är lösningens djup t. ex. 3 cm, blir den totala katodytan 24 cm^2 och den använda strömstyrkan bör vara 5 amp. (12 à 13 parallellkopplade 32-ljuslampor). Med en inkopplad voltmeter kontrolleras, att spänningen ej överstiger 4 volt.

Jag har analyserat ett i praktiken till förkromning använt kromsalt och funnit det bestå av uteslutande kromsyra, såväl vid analys på kromat med jodkaliumlösning och titrering på den frigjorda joden med tiosulfat, som vid titrering på syrahalten med lut och fenolftalein som indikator. Preparatet innehåller dock något svavelsyra, som

troligen är en förorening från dess framställning. För flertalet läsare är det ju välbekant, hur man framställer kromsyra; för dem som ej ha saken aktuell kan följande recept tjäna som ledning. 100 g tekniskt natriumbikromat (detta är betydligt lösligare i vatten än kaliumbikromat) löses i 250 cm^3 vatten, varefter man under omröring gjuter däri 400 cm^3 koncentrerad svavelsyra i en fin stråle. Den starkt uppvärmda lösningen får stå och svalna, varvid kromtrioxiden kristalliserar ut i form av en fin kristallmassa. Lösningen avhälles och kristallgröten hälles upp i en tratt, i vars pip man lagt en liten bit glasull. Svavelsyran rinner så småningom av och man pressar kristallmassan med en porslinssked. Hastigare sker filtreringen, om tratten ställes i en gummiring på en sugkolv, som förenas med vattensugpumpen. Urspolningen av bägaren sker med litet av filtratet. Vill man tvätta ur svavelsyran ur fällningen, sker det med ren koncentrerad salpetersyra. Kromsyran kan torkas på ett stycke taktegel. Skall man använda kromsyran till elektrolys, så är ju torkningen överflödig, man löser upp den i den behövliga mängden vatten. Utbytet på CrO_3 är cirka 60 % av den beräknade mängden. Av 100 g $Na_2Cr_2O_7$ erhåller man således 40 à 45 g CrO_3. Det är dock att märka, att natriumbikromatet ej alltid innehåller den teoretiska mängden kromtrioxid utan stundom t. o. m. endast $^2/_3$ därav.

Jag har även försökt analysera teknisk s. k. kromprotekt. Vid destillation av 36 g därav erhölls ej fullt 0,5 cm^3 av en vid 97° kokande vätska, vars specifika vikt var 0,65—0,67 och som hade en starkt sötaktig lukt, påminnande om amylacetat. Resten var uteslutande fotogen. Därav kan man förmoda, att tillsatsen icke har någon väsentlig betydelse för preparatet.

Bestämning av luftens syrehalt, utförd som laborationsförsök i realskolan.

Av BROR HÄLLQVIST och G. STARCK.

De gängse metoderna för laborationsmässig bestämning av luftens syrehalt, vilka med oväsentliga variationer utföras så, att man stjälper en luftfylld gasklocka över ett antänt och brinnande ämne, vanligen järn, hava av K. PARCK (denna tidskr. årg. 13, h. 3, sid. 151) gjorts till föremål för enligt förff:s mening fullt berättigad kritik. Mot Parcks fordran, att försöket i denna form bör avlysas från laborationerna i realskolan, då man ej bör låta eleverna utföra försök, som på grund av grova, principiella felkällor måste ge starkt felaktiga resultat, hava vi heller ingenting att invända, men endast då den gäller experimentet i den här antydda formen. Vi anse, att det vore en stor förlust, om detta fundamentala försök skulle försvinna från realskolans lärjungelaborationer, och vi ha därför försökt att förbättra metoden, så att den fyller rimliga anspråk på noggrannhet och samtidigt är så enkel, att den kan utföras av eleverna i den första årskursen under en laborationstimme.

En grundläggande fordran är, att förbränningen äger rum i en väl definierad, d. v. s. avspärrad luftvolym. Samtidigt bör antändningen kunna ske utan några komplicerande anordningar, d. v. s. genom direkt upphettning utifrån med låga. Dessa båda fordringar kunna numera lätt uppfyllas, sedan i handeln blivit tillgängliga kärl av ganska många svårsmälta och temperaturbeständiga glassorter, såsom supremaxglas, pyrexglas, jena-duranglas, jenageräteglas m. fl.

I kärl av dessa kunna utan svårighet och utan risk för apparatens deformation icke alltför svårantändliga ämnen, såsom järn, koppar, auermetall m. m. antändas genom upphettning med låga utifrån.

Efter att hava prövat ett stort antal brännbara ämnen, särskilt metaller, och olika anordningar för förbränningens utförande hava vi slutgiltigt stannat vid röd fosfor såsom det ur alla synpunkter lämpligaste bränslet och förbränna det i en apparat av det utseende, som fig. 1 utvisar. Den är tillverkad av jenageräteglas, men kan givetvis också utföras i pyrex- eller supremaxglas (vilket blir dyrare) eller av jenanormalglas (något billigare), däremot knappast av vanligt glas, eftersom dess form medför uppkomsten av starka termiska spänningar vid uppvärmning. Dimensionerna äro: längd 170 mm, rörvidder 22 resp. 7 mm. Sin egenartade form har kärlet fått, sedan förberedande försök visat, att i ett enkelt rör eller en kolv förbränningen blir ofullständig, och att luften måste cirkulera. Genom att placera det här avbildade röret i lodrät ställning, anbringa fosforn i botten av det vidare röret och lågan rakt under fosforn, vinner man, att luften under förbränningen går flera varv runt genom apparaten.

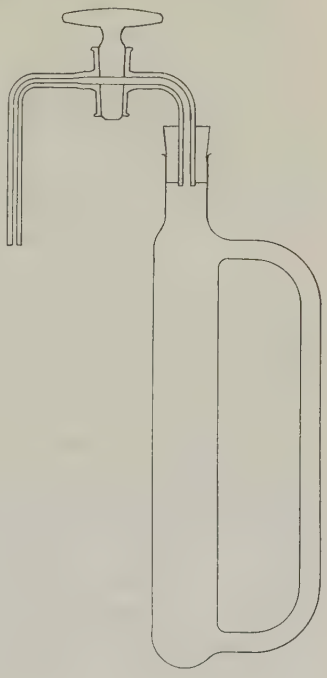


Fig. 1.

Apparaten är tillsluten med en kautschukpropp, försedd med ett dubbelböjt kranrör. Den utanför kranen befintliga delen av röret, vars volym är en felkälla, bör vara kapillärt,

men ej för smalt, emedan man då löper risken av att röret självt eller kranens borrning täppes till av kranfett. Den innanför kranen befintliga delen bör vara halvkapillär. Ett försiktighetsmått, som ej bör försummas är att sätta fast kranen med en gummisnodd. En viss omsorg fordrar också utväljandet av proppen med hänsyn till elevernas bristande apparatvana. Proppen bör vara lätt att sätta i och bör gå ned till $^1/_2$ av sin höjd. Rörets vikt är ca. 50 g, dess volym ca. 45 cc.

De förberedande försöken visade också nödvändigheten av att temperaturen är väl definierad. Till utrustningen hör därför även en bägare fylld med vatten av rumstemperatur och så stor, att röret kan nedsänkas däri till nästan hela sin längd.

Principen för försöket är den, att man först väger apparaten beskickad med fosfor, förbränner fosforn med stängd kran, nedsänker avledningsröret under vatten och öppnar kranen, varvid en med den försvunna syremängden lika vattenvolym insuges. Denna vattenvolym bestämmes genom förnyad vägning. För att erhålla luftens volym fyller man apparaten helt med vatten och väger för tredje gången. I detalj beskrivet, tillgår försöket lämpligen på följande sätt:

1. Den torra kolven beskickas — av läraren — med torr röd fosfor. För de 50 cc luft som apparaten innehåller är 0.05 g fosfor rikligt beräknat. Därutöver bör man ej gå, emedan resultatet då blir sämre. Har man en gång vägt upp denna mängd, kan man sedan använda ögonmått. Proppen isättes.

2. Kolven väges bäst upphängd under vågbalken i en för ändamålet förfärdigad liten dubbelböjd krok, som man hänger i den till vågbalken hörande kroken.

3. Kolven fastsättes med halsen i en stativklämmare och nedsänkes så långt som möjligt i vattenbadet. Kranen öppnas.

4. Efter 1—2 min. stänges kranen, röret, alltjämt fastsatt i klämmaren, lyftes upp ur vattenbadet och avtorkas.

5. För att tända fosforn använder man lågan från injektorn till en bunsenbrännare. Denna låga, med en höjd av ca. 15 mm, sätter man på stativplattan och sänker därpå röret, så att dess botten befinner sig ca. 15 mm rakt över lågans spets. Det är sålunda en mycket lindrig uppvärmning, som åsyftas; ytterligare en fördel är att eleverna ej behöva »sköta» lågan.

6. Efter 15—30 sek. tänder sig fosforn och brinner med en stor, men kortvarig låga. Först bildas en rent vit rök av fosforpentoxid, kort därpå en gul rök av destillerande fosfor. När denna gula rök fyller det vida röret, är försöket färdigt. Hela förbränningen tar en tid av ett par minuter. Efter densamma äro väggarna beslagna dels med fosforpentoxid dels med fina droppar av vit fosfor.

7. Sedan röret svalnat, nedsänkes det på nytt i vattenbadet. En liten bägare fylles med vatten hälst av samma temperatur som badets och hålles så, att avledningsröret går ned under ytan. Därpå öppnas kranen och hålles öppen, så länge vatten insuges. Därpå stänges kranen.

8. Röret upptages ur vattnet, avtorkas och väges.

9. Kranröret borttages, röret sköljes med kallt vatten, varvid huvudmängden fosfor, både röd och vit avlägsnas utan risk för laboranten, och fylles till brädden med vatten. Kranröret isättes med kranen öppen, så att röret blir fullständigt fyllt med vatten. Apparaten avtorkas och väges ånyo.

10. Kvoten mellan de båda vattenmängderna utgör luftens (skenbara) syrehalt.

Enligt dessa anvisningar utfördes försöket nyligen av en klass 4[5] med 14 laborationsavdelningar, varvid följande resultat erhöllos:

Syrehalt i %	(18.1)	20.0
	18.9	20.0
	19.5	20.1
	19.5	20.2
	19.6	20.6
	19.6	20.8
	19.8	20.8

Medeltal av 13 värden (det första uteslutet) 19,9(5) % ($\pm$ 0,15).

Vilket värde man vid försöket bör erhålla på förhållandet mellan de insugna vattenmängderna beror på temperatur, barometerstånd och relativ luftfuktighet enligt följande härledning, varvid vi förenkla problemet genom att försumma volymen av kranröret utanför kranen och genom att sätta luftens relativa fuktighet $= {}^1/_2$. Kalla

verklig halt av syre i torr luft ..... s,
barometerståndet ..... B mm,
trycket av mättad vattenånga vid t° ..... p mm,
kärlets med vatten utvägda volym ..... V cc.

Då är

volymen torr luft (B mm) ..... $V - \frac{p}{2B} V$ cc,

varav torr kvävgas ..... $(1 - s)\left(V - \frac{p}{2B} V\right)$ cc.

Sedan syret förbränts, insuges vatten av volymen v cc. Röret innehåller nu ovanstående volym torr kvävgas jämte mättad vattenånga av p mm tryck och approximativt samma volym. Reducerad till B mm, utgör vattenångans volym således

$$(1 - s)\left(1 - \frac{p}{2B}\right) V \frac{p}{B} \text{ cc.}$$

Volymen av den fuktiga kvävgasen är således

$$V(1 - s)\left(1 - \frac{p}{2B}\right)\left(1 + \frac{p}{B}\right) \text{ cc.}$$

Alltså är det insugna vattnets volym

$$v = V - V(1 - s)\left(1 - \frac{p}{2B}\right)\left(1 + \frac{p}{B}\right)$$

och

$$\frac{v}{V} = 1 - (1 - s)\left(1 + \frac{p}{2B}\right) = s - (1 - s)\frac{p}{2B}.$$

För $s = 0.2099$ erhålles härav vid barometeravläsningarna 740—770 mm och temperaturerna 14—24° följande värden på de resultat i %, som försöket bör giva:

t	740	750	760	770
14	20.35	20.36	20.37	20.38
16	.26	.27	.28	.29
18	.16	.17	.18	.19
20	.06	.07	.08	.09
22	19.93	19.95	19.96	19.97
24	.79	.81	.83	84

Barometerståndet har sålunda mycket ringa inverkan på resultatet, medan däremot en temperaturhöjning av 1° orsakar en minskning av den skenbara syrehalten med 0.05—0.07%. En mycket stor inverkan har också den relativa fuktighetens värde, såsom framgår av följande tabell, vari den skenbara syrehalten är framställd som funktion av den relativa fuktigheten vid 17° och 760 mm.

Relativ fuktighet	0.2	0.3	0.4	0.5
Syrehalt enl. försöket	19.76	19.91	20.07	20.22

Nu är den relativa luftfuktigheten en tämligen oberäknelig faktor, och man bör nog avhålla sig från fordran på att läraren skall göra en bestämning därav för att kunna jämföra laboranternas resultat med det, som bör väntas. Man torde få nöja sig med att fastslå, att den vid detta försök erhållna »syrehalten» skall vara ungefär 20%, snarare något över än under och lägga huvudvikten vid att laboranternas värden stämma överens sins emellan. I ljuset av dessa siffror framstår emellertid den äldre metodens brister i ännu skarpare dager, eftersom man vid dem som regel erhåller värden högre än den torra luftens syrehalt.

Bestämning av konstanten i Joules lag med doppvärmare och termosflaska.

Att termosflaskan i många avseenden är en idealisk kalorimeter torde vara odiskutabelt. Detsamma gäller om den elektriska doppvärmaren för uppvärmning av vätskor för många olika ändamål. När det gäller kvantitativa försök, ha båda den nackdelen, att man icke känner deras vattenvärden och ej heller så noga vet, hur stor del av dem som verkligen uppvärmes. I många fall kan man dock på ett ganska enkelt sätt eliminera bort dessa faktorer. Här skall nu visas, hur man vid elevlaborationerna i gymnasiet kan anordna i rubriken nämnda försök.

I termosflaskan hälles något vatten av ungefär rumstemperatur, doppvärmaren tillsammans med termometer och omrörare (gåsfjäder) nedsänkes i detta, och temperaturen bestämmes. Medelst mätglas uppmätes sedan en viss kvantitet förut avkylt vatten, och sedan detta vattens temperatur också bestämts, ihälles detsamma i termosflaskan. Utan att intressera sig för blandningstemperaturen, slutes nu strömmen och hålles sluten, tills temperaturen i termosflaskan ånyo antagit sitt ursprungliga värde. Spänning, strömstyrka och tid observeras. Den värmemängd, som då tillförts, är tydligen lika med den värmemängd, som åtgår för att ge det ihällda vattnet samma temperatur som det övriga. Termosflaskan och doppvärmaren, som ha samma temperatur före och efter försöket, ha således varken upptagit eller avgivit något värme. Ekvationen för uträkning av Joules konstant k blir alltså

$$300 \,.\, 13.4 = k \,.\, 69.0 \,.\, 0.458 \,.\, 526.$$

Siffrorna äro tagna ur vidstående tabell, som innehåller en del material från elevernas egna laborationer.

Vattenmängd cm^3	Beg.-temp.	Temp. i kal. före och efter	Temp. förhöjning	V volt	I amp.	Tid sek.	k
300	5.5	18.9	13.4	69.0	0.458	526	0.242
300	4.1	16.5	12.4	93.1	0.664	255	0.236
300	4.0	17.6	13.6	74.2	0.520	447	0,237
300	4.5	18.2	13.7	58.2	0.418	701	0.241
300	4.9	17.9	13.0	68.2	0.452	520	0.243
300	5.2	18.4	13.2	73.6	0.518	442	0.235

En titt på siffermaterialet visar, att med tillgång till någorlunda riktiga strömmätningsinstrument de två första decimalerna i k-värdet böra vara tillförlitliga, vilket också erfarenheten visar.

Det enda, som kan vålla vissa svårigheter, är att bryta strömmen i det rätta ögonblicket. I allmänhet få därför eleverna även avläsa blandningstemperaturen och sedan sluta strömmen en viss bestämd tid och observera temperaturförhöjningen. Med tillhjälp av de värden, de då erhållit, kunna de lätt räkna ut, hur länge strömmen skulle varit sluten för att den önskade sluttemperaturen skulle erhållits.

Edvin Jönsson.

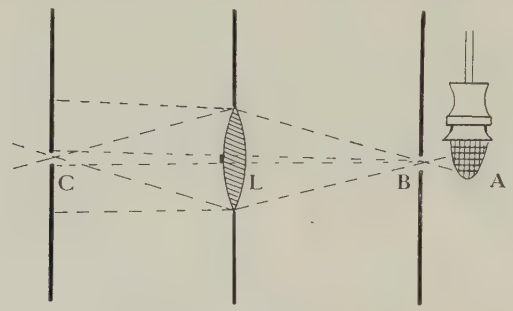
Kvartslinsmetoden.

Bland vårens studentuppgifter i fysik äro exemplen 3 och 6 särskilt intressanta, därför att de hänföra sig till praktiskt använda mätmetoder.[1] Tankegången, som ligger till grund för exempel 6, angavs 1911 av H. Rubens och R. W. Wood. Dess praktiska tillämpning är i litteraturen känd under namnet kvartslinsmetoden. Denna användes för att skilja den ultraröda strålningen mellan 80 μ och 400 μ från kortare vågor.

De fakta, som ligga till grund för kvartslinsmetoden, äro följande. Kristallinisk kvarts är nästan ogenomskinlig för strålar, vilkas våglängder ligga mellan 8 μ och 30 μ. På båda sidorna om detta absorptionsområde är kvarts genomskinlig. Brytningsindex för kvarts minskas kontinuerligt från 1,67 till 1,46, då ljusets våglängd ökas från 185 $\mu\mu$ till 4,2 μ. Som medelvärde på brytningsindex inom detta område kan man alltså taga det i exempel 6 angivna värdet 1,55. Vid 56 μ är brytningsindex för kvarts enligt mätningar av Rubens lika med 2,18. För större våglängder är brytningsindex något mindre. Som medelvärde för mycket långvågiga, ultraröda strålar tager man värdet 2,15. Utgående från dessa medelvärden på brytningsindex kan man alltså draga den slutsat-

[1] Problemförf. har haft vänligheten meddela, att den metod, som behandlas i problem 3, härstammar från Lammert. Sifferexemplet är hämtat från en uppsats om molekylstrålar av Esterman, Frisch och Stern, Zeitschr. f. Physik, *73*, p. 357, 1931. Molekylstrålarnas kapitel är ganska nytt och är av mycket stort intresse. Laborator B. Beckman, Uppsala kommer att i ett följande häfte ge en översikt av detta forskningsområde. *(Red.)*

sen, att fokaldistansen för en kvartslins är ungefär hälften så lång för de långvågiga strålarna som för synligt ljus.



Figuren anger schematiskt en försöksanordning enligt kvartslinsmetoden. En liten öppning B i en skärm belyses medelst en auerbrännare A eller en kvartskvicksilverlampa. En bikonvex kvartslins L placeras bakom skärmen på ett avstånd, som är lika med linsens dubbla fokaldistans för de långvågiga strålarna. På andra sidan om linsen är en skärm uppställd. I denna finns en öppning C, som är identiskt lika med öppningen B. Då båda skärmarna befinna sig på samma avstånd (= dubbla fokaldistansen) från linsen, faller den ultraröda bilden av B i öppningen C. De synliga strålarna, för vilka avståndet mellan B och linsen i det närmaste är lika med linsens fokaldistans för synligt ljus, bilda efter genomgången av linsen ett divergent strålknippe. Genom en liten cirkelformig pappskiva, som är fäst mitt på linsen L, hindras centrala strålar att gå genom öppningen C. Det kortvågiga ljuset är fullständigt avbländat. Genom öppningen C gå endast de långvågiga strålarna, som alltså kunna undersökas utan störningar från kortvågiga strålar. Detta är så mycket viktigare som intensiteten för strålar i ultrarött mellan 100 μ och 400 μ är oerhört liten jämförd med intensiteten för synligt ljus.

C. Bergholm.

Bokanmälningar.

Georg Joos, *Lehrbuch der theoretischen Physik.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932, 644 sid., RM 26: —.

Mången, som önskar göra sig närmare förtrogen med något visst område av den fysiska forskningen, torde finna, att innehållet i de monografier eller andra framställningar, som han för detta ändamål är hänvisad till, icke är tillgängligt utan ett förstudium av huvuddragen i en mera överskådlig form eller av de matematiska metoder, som komma till användning. Svårigheter att begränsa arbetet på denna uppgift till det för ändamålet nödvändiga uppstå gärna genom bristen på lämplig litteratur. Värdet hos Joos' bok ligger till stor del däri, att den verksamt bidrager till att fylla denna brist, vilket förf. själv genom en träffande bild uttrycker i förordet.

Läroboken förutsätter kandidatkunskaper i matematik och meddelar i sin första avdelning (60 sid.) de nödvändiga matematiska hjälpmedlen därutöver. Fysiken indelas i följande avdelningar: mekanik, kontinuumteorien för elektromagnetiska och optiska fenomen, atomistisk elektricitetslära, värmeteori (fenomenologisk och statistisk del), atomernas och molekylernas byggnad jämte teorien för spektra. Att sammanträngа det oerhört omfattande stoffet på så litet utrymme är givetvis en mycket svår uppgift, som förf. dock löst på ett tillfredsställande sätt.

Det sista årtiondets fysik, som i denna anmälan torde ha ett speciellt intresse, har åtminstone inte särskilt gynnats med utrymme. Den representeras av följande grenar: Bose—Einsteins och Fermis statistik jämte deras användning bl. a. på metallernas elektronteori (Sommerfeld), Zeemaneffekt och multiplettstruktur enligt elektronspinhypotesen, Pauliprincipen och periodiska systemet och slutligen ett kapitel med titeln Kritisk atommekanik (kvant- och vågmekanik). Rubriken är såtillvida missvisande, som alla problem i detta och följande kapitel konsekvent behandlas enligt Schrödingers vågmekanik och Heisenbergs kvantmekanik endast i förbigående beröres. De nämnda kapitlen behandla Heisenbergs osäkerhetsrelation, materievågorna, Schrödingerekva-

tionen och dess egenvärden, väteatomen, spektrallinjers intensitet, störningsräkning, valensteori, dispersionsteori, Ramaneffekten samt Gamows teori för det radioaktiva sönderfallet.

Erik Walles.

Arthur March, *Moderne Atomphysik, Eine allgemein verständliche Einführung.* Verleger: Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1933, 115 s., 6 RM.

Den fysiska litteraturen har genom detta arbete av prof. i teoretisk fysik vid Univ. i Innsbruck, A. March, fått en länge saknad populär framställning av den matematiska fysikens nyaste gren, vågmekaniken. Den kan läsas med behållning av varje fysiklärare.

Förf. har medtagit lagom mycket av matematisk utrustning för att läsaren skall fatta tankegångens huvuddrag. De för atomfysikens utvecklingsskede grundläggande försöken äro även infogade i deras sammanhang med teorierna. Ur pedagogisk synpunkt är det den bästa framställning av ämnet, jag läst. De invändningar, den vetgirige och kritiske läsaren emellanåt har anledning framställa, då vågmekanikens egendomliga idéer utvecklas och tillämpas på fysiska och kemiska företeelser, har förf. förutsett, och läsaren finner dem omedelbart upptagna, skärskådade och bemötta.

Det är mig en glädje att här kunna rekommendera en framställning, som i varje fall för gemene man fyller alla krav på en orienterande översikt över denna i så hög grad svårbegripliga men betydelsefulla del av modern naturkunskap.

M. Sjöström.

C. G. A. Arvidson, *Praktiska navigeringstabeller*, Nautiska Förlaget, Stockholm 1932, XXVI + 107 sid., kbd. 12 kr.

Föreliggande arbete betecknar ett nytt steg på rationaliseringsvägen inom navigationen. I och med att de »nya» navigeringsmetoderna, baserade på läran om ortlinjer, alltmera undanträng den sedan århundraden praktiserade »middagsräkningsmetoden» med sin traditionella timvinkel på morgonen och meridianhöjd på middagen, ha de erforderliga tabellverken undergått en alltmer genomgripande förändring.

Den astronomiska ortlinjemetoden innefattar i huvudsak tre varianter, benämnda longitud-, latitud- och höjdmetoden. Alla tre grunda sig på en enkel höjdobservation av någon himlakropp.

Longitudmetoden, som i princip uppfanns redan år 1837, innebär en beräkning av den longitud, som svarar mot en viss, såsom sannolik antagen, latitud. Genom den så erhållna skärningspunkten drages en linje i sjökortet, vinkelrät mot den observerade himlakroppens azimut. På denna linje befinner sig tydligen observatören. Metoden ger noggrannast resultat, när höjden mätts nära första vertikalen.

Latitudmetoden uppfanns något årtionde senare och avser en beräkning av den latitud, som svarar mot en antagen longitud. Ortlinjen uppdrages därpå i kortet liksom i förra fallet. Metoden lämpar sig bäst, om himlakroppen observerats nära meridianen, och innebär ju då egentligen en vanlig cirkummeridianhöjdsberäkning.

Höjdmetoden slutligen uppfanns år 1875 av den franska amiralen Marcq St. Hilair, efter vilken den även ofta benämnes, och går i korthet ut på att från en antagen position beräkna en himlakropps höjd och jämföra denna med den observerade. Differensen säger, hur mycket den antagna positionen i verkligheten bör förskjutas i riktning mot eller från himlakroppen. Denna metod är alltid lika användbar och därför särskilt värdefull.

De för de olika metoderna använda beräkningsformlerna ha brukat deduceras för logaritmisk kalkyl, och svenska navigeringstabeller ha därför hittills lagt huvudvikten på de logaritmiska funktionerna. I Klints berömda tabellverk, vars första upplaga utkom år 1842, och som alltjämt användes i stor utsträckning, upptaga sålunda de logaritmiska tabellerna omkring 300 sidor, d. v. s. nära tre fjärdedelar av hela arbetet. I Thores Nautiska Tabeller av år 1906, som äro uppställda med full hänsyn till ortlinjemetodens behov, upptaga ännu de logaritmiska tabellerna nära halva volymen. De nu föreliggande Arvidsonska tabellerna ha efter utländska mönster fullföljt tendensen ända därhän, att icke ens ordet logaritm förekommer i hela boken. Detta innebär ett mekaniserande av uträkningsarbetet, som ur principiell synpunkt just ej är tilltalande, men för den praktiska navigatören, som en gång satt sig in i tabellernas bruk, medför tidsvinst och minskat arbete. Och på vår tids snabbgående tonnage gäller det givetvis att kunna med minsta möjliga räknearbete hålla besticket under fortlöpande kontroll.

Arbetets huvuddel, 66 sidor, upptages av de fyra sfäriska kopplingstabellerna A, B, D och E, medelst vilka de tre ortlinjemetodernas problem lösas nästan utan räkning. Dessutom erhålles på mycket enkelt sätt storcirkeldistans och -kurs mellan två punkter

på jordytan samt lösning av de vanliga sfärisk-astronomiska problemen.

Härefter följa bestickstabeller samt tabell över meridionaldelar, användbar bl. a. för radiobäringars reducering från storcirkeln till loxodromen. Intervallen äro överallt så valda, att tillräckligt noggrann proportionering kan verkställas i huvudet.

Genom väl valda räkneexempel har förf. belyst respektive tabellers användning för olika ändamål. I övrigt är texten mycket kortfattad. Några smärre inadvertenser borde kanske påpekas. Ett konsekvent användande av ordet föremiddag i st. f. förmiddag är rätt stötande. Med namnet efemerid bruka årsböcker betecknas men icke de däri angivna variablerna. Att stava azimut med s men bibehålla z i t. ex. zon och zenit förefaller inkonsekvent. Korrekturläsningen av texten är ej fullt oklanderlig, men huvudsaken för ett arbete som detta är ju dock, att siffergranskningen av tabellerna varit sträng. Register saknas.

I Arvidsons Praktiska Navigeringstabeller ha våra svenska navigatörer fått ett hjälpmedel, som gör dem fullt oberoende av de stora och dyra utländska arbetena på detta område. Det är väl att antaga, att tabellerna bli införda vid våra navigationsskolor, och även för amatörnavigatörer ha de sitt stora intresse och praktiska värde.

Sven Grenander.

Lennart Elfman, *Lärobok i mekanik för tekniska skolor. I. Statik.* 4:e uppl. P. A. Nordstedt & Söner (Svenska Bokförlaget) 1932, 92 sid., kr. 3: 60.

Föreliggande del av Elfmans lärobok i mekanik är till innehållet i huvudsak identisk med 1:a upplagan, som utkom 1917. Texten har endast undergått vissa smärre ändringar, och därjämte hava övningsuppgifternas antal ökats från 200 till 240.

Det förhållandet att läroboken trots det fåtaliga antalet tekniska studerande i vårt land på så relativt kort tid kunnat utkomma i icke mindre än fyra upplagor vittnar om, att författaren lyckats i sin föresats att skapa en god lärobok. Anmälaren, som i 12 år använt läroboken vid sin undervisning i ämnet, är också den första att erkänna densammas förtjänster: en klar, ledig och lättfattlig stil, osedvanligt goda figurer och övningsuppgifter, som utmärkt anknyta sig till de problem, som den studerande sedermera kan möta i det praktiska livet.

Önskvärt hade varit, att författaren i större utsträckning använt sig av de kunskaper i differential- och integralräkning, som våra

elever i enlighet med 1918 års stadga numera delgivas. Bl. a. skulle tyngdpunktsläran därigenom hava blivit avsevärt mera njutbar. Den elementära härledningen av friktionens inverkan vid ett tågs glidning över fast rulle kunde saklöst utelämnas. Ett annat önskemål är, att kraftens vektoriella karaktär mera poängterats, och att vektorbegreppet införts. Om i en kommande upplaga de nuvarande övningsuppgifterna kompletteras med en del exempel av högre svårighetsgrad, skulle säkerligen också bokens värde för undervisningen ökas.

Martin Lien.

Molly Hallin, Gurli Sundblad, *Planimetriska och stereometriska beräkningsuppgifter.* Magnus Bergvalls förlag, Stockholm 1932, 36 sid., 90 öre.

Innehållsförteckning: 124 uppgifter, omfattande rektangeln, kvadraten, snedvinkliga parallellogrammen, triangeln, parallelltrapetset och cirkeln, 71 st. på kapitlen prismat och cylindern, pyramiden och konen samt klotet, 24 st. om likformig avbildning, 51 st. blandade uppgifter, 46 st. realskolexamensuppgifter samt facit.

I början av varje avdelning med rent planimetriska och stereometriska uppgifter finnas figurer med beteckningar på storheterna i de formler, som beledsaga figurerna. Som av innehållsförteckningen framgår, ingå även realskolexamensuppgifter i häftet, men detsamma förutsätter likväl endast kännedom om rationella tal (med undantag av π), varför de stereometriska uppgifterna knappast kunna vara av sådan art, att de »innebära en uppövning av lärjungarnas förmåga att fatta rumsförhållanden».

En stor del av uppgifterna äro sådana, att man vid lösningen blott har att med givna formler för ögonen insätta uppgivna storheters mätetal. Formler givas t. o. m. för rektangelns och kvadratens omkretsar och då självfallet $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ för parallelltrapetsets yta. (Varför icke formler även för tavelramar och cirkelringar?) Någon antydan om huru formlerna kunna deduceras eller verifieras, finnes icke. Detta är visserligen icke alltid möjligt på detta stadium, t. ex. beträffande klotytan, men när det går, bör man ej underlåta att göra det.

Enl. anm:s åsikt böra på lågstadiet de formler, som på ett eller annat sätt deducerats fram, givas under den form, som framgår av förfaringssättet därvid och erinrar därom. Ha lärjungarna erhållit parallelltrapetsets yta såsom summan av två trianglars ytor, så låt dem skriva $\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}$. Ha de vid mätning erfarit, att

cirkelns omkrets är $\pi \times$ diametern eller att dess yta genom sönderklippning och utbredning till en rektangel blir halva omkretsen ($\pi \times$ radien) $\times$ radien, så låt dem oupphörligt erinras om detta och låt det för dem bli en rent räkneteknisk operation att sedan bringa dessa uttryck till den vid varje tillfälle lämpligaste formen. Att någon lärjunge då skulle behöva sitta villrådig i valet mellan $2\pi r$ och πr^2 vore uteslutet.

Vad nu de särskilda uppgifterna angår, må påpekas, att n:r 59 är orimlig. Någon pgrm med en sida 9,8 dm, hela omkretsen 30,8 dm och vinkelräta avståndet mellan de längsta sidorna 6,4 dm existerar icke. Icke desto mindre löses uppgiften lekande lätt av dem, som bara insätta de givna storheterna i formlerna. I svaret uppges också det vinkelräta avståndet mellan kortsidorna vara 11,2 dm, alltså längre än pgrmens långsidor! I övrigt är i det stora hela endast berömmande ord att säga om förf:nas strävan till och framgång uti att göra uppgifterna så praktiskt nyttiga, så tankekrävande (detta gäller de icke rena »insättningsuppgifterna») och givande i avseende på sortförvandling som möjligt.

M. E. Wahlgren.

Meddelande om Ny materiell, häft. 8. P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, Stockholm 1932, 48 sid., kr. 1: —.

Liksom de tidigare häftena i denna serie bjuder även detta på ett aktuellt och värdefullt innehåll.

Lektor Ivar Malmborg beskriver några egna apparatkonstruktioner, dels en enkel oscillationsapparat för demonstration av växelström, dels en apparat för undersökning av den fria fallrörelsen. För registrering av tiden användes i den sistnämnda 50-periodig växelström, som på ett polpapper -- över vilket en släpkontakt föres — elektrolytiskt markerar hundradels sek. Metoden är intressant — har tidigare använts bl. a. av Bruun och Devik i deras Fysikk for Middelskolen, Oslo 1928 — men ger ej så noggranna resultat, varför apparaten snarast lämpar sig som demonstrationsapparat.

En närmast för Göteborgs nät (2×120 volt likström) avpassad anläggning för alstring av växelström, enankaromformare jämte kopplingstavla med behövliga mätinstrument m. m., beskrives av lektor A. Björkesson.

Lektor M. Lemoine redogör för en synnerligen allsidig experimenttavla för såväl lik- som växelström, av honom konstruerad för Humanistiska läroverket i Sigtuna. Den uppgives vara relativt billig, dock anges ej priset i häftet.

En Bunsens iskalorimeter av svensk tillverkning levereras nu av firman och lektor T. Wetterblad ger noggranna instruktioner ang. dess handhavande. En uppsats av samme förf. om »En enkel optisk bänk jämte några laborationsuppgifter» förtjänar att uppmärksammas. Bänken är synnerligen prisbillig och mycket användbar.

Till slut beskrives en kombinerad volt- och ampèremeter, »Triometer» och firman Liesegangs »Kvantprojektor», en optisk universalapparat, särskilt användbar vid försök ang. ljusets natur.

C. E. Blom.

Tidskrifter.

Svensk Kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XIV, 1933. N:r 1 (jan.): O. Stelling, Potentiometrisk undersökning av några metoder för oxydimetrisk hydrazinbestämning. — Die chemischen Elemente und Atomarten nach dem Stande der Isotopenforschung (ref.). — N:r 3 (mars): G. Assarsson, Om aluminatcement och dess hydratisering. — N:r 4 (april): Arvid Hedvall, Reaktionsförmåga i fast tillstånd. — Den svenska kemiska industrien under 1932. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XIV, 1933, dubbelh. 1—2.

Ur innehållet. Yngve Öhman, Observationer av solkoronan vid fullt dagsljus. - Carl Schalén, Nyare mätningar av solens och stjärnornas rotation. — N. V. E. Nordenmark, Swedenborgs planetteori. — Åke Wallenquist, Astrofysikaliska färgbestämningsmetoder. - Knut Lundmark, Lundaobservatoriets katalogisering av nebulosor och stjärnhopar. - Bertil Lindblad, Ljusabsorptionen i Vintergatan och stjärnsystemets dimensioner. — Notiser.

Industritidningen Norden. Årg. 11933, h. 1—20.

Ur innehållet. Ett tekniskt storverk i Italien. — Mekaniskt fjädrande hjulkonstruktioner. — Om uppfinningar och upptäckter såsom föremål för rättsskydd. — Modern nattflygning. — Gasgeneratordrift för automobiler och traktorer. — IVA-spisen. — En ny värmemotor. — Träkolsbrikettering. — Automobilernas livslängd. — Likströmmens framtid. — Nya uppfinningar och fabrikat. — De italienska autostradorna. — En likriktare för högspänd växelström.

Radio och Radioamatören. Årg. 1933, h. 1—4. Tidskrifterna »Radioamatören» och »Radio» ha i år sammanslagits till en tidskrift.

Ur innehållet. Högfrekvensspolar med järnkärna. — Moderna mekaniska och elektriska grammofoner. — Nätljudskompensation vid likström. — Kopparlikriktare för högfrekvens. — Störningssökaren. — Praktisk mätteknik. — Kompenserade vågfällor. — Nya apparattyper.

Matematisk Tidsskrift. København 1933, h. 1.

Ur innehållet i avd. *A.* P. Morgensen, Funktioners Voksen og Aftagen. — G. Boldsen, Stereometriens parallelsætninger. — H. C. Espensen, Medianerne i en Triangel. — Danske Eksamensopgaver. Ur avd. *B.* B. Jessen, Om Uligheder imellem Potensmiddelværdier. — Litteraturanmeldelse.

Fysisk Tidsskrift. København 1932, h. 5 o. 6; 1933, h. 1.

Ur innehållet. J. Ambrosen, Højdestraalingen. — H. Petersen, Om Jordmagnetisme. — A. Menzinger, Anskueliggørelse af Foucaults Pendulforsøg. — E. Krüger, Molekylspektre og Kvanteteori. — C. B. Madsen, Spidstælleren. — E. Rubin, Nogle elementære Tidserfaringer. — T. Bjerge, Brownske Bevægelser; Projektion af Wilsonkammer. — Boganmeldelser.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1932, h. 4; 1933, h. 1.

Ur innehållet. Th. Skolem, Ludvig Sylow og hans betydelse for matematikken. — A. Beurling, Généralisation d'une inégalité de Cauchy. — H. Bergh-kragemo, Matematisk Bibliografi. — Bokanmeldelser. — Eksamensopgaver. — Opgaver til løsning.

Den Højere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. 1932, h. 1—20. Oslo.

I årg 1932 ha förekommit följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll: S. Bruun, Klor og klovannstoff. — B. Ringstad, Regnestaven. — L. Gleditsch, Om fremstillingen av klor og klorvannstoff i kjemiske skoleforsøk. — B. Vale, Selenlikeretteren. — E. Esp, Kjemien i gymnasiet. — O. Devik, Elektrisitetslæren i støpeskjeen. — J. Rødseth, To ligninger av første grad med to ukjente. — A. K. Brynildsen, To elevforsøk i optik; Demonstration av kraftpar i virksomhet. — Ett »Tillegg til Den høiere Skole» (52 sid.) innehåller norska, danska och svenska examensuppgifter givna under 1932.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

600) *Sidorna i en plan fyrhörning äro i ordning 3 cm, 4 cm, 6 cm och 5 cm. Hörnen tänkas försedda med ledgångar. Minsta sidan fasthålles. Sök orten för den inskrivna cirkelns medelpunkt.* X.

601) *En ellips har sitt centrum i ett av hörnen i en rektangel och går genom de andra tre. Rektangelns yta är A. Hur stor är ellipsens?* X.

602) *På ett cirkelrunt papper med radien R utmärkes en punkt P på avståndet $k \times R$ från centrum. Man viker ihop papperet så, att det invikta segmentets båge går genom P. Därpå utslätas papperet åter och en ny vikning företages omkring en annan korda o. s. v. Hur stor del av papperets yta förblir fri från spår av veck hur många gånger proceduren än upprepas?* X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

603) Lös ekvationen $(n \cdot x^n)^{n-n^2 \cdot \log x} = 1$

Svar: $x_1 = \sqrt[n]{10}$; $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

604) Lös ekvationen

$$\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x - \sin 3x.$$

Svar: $x_1 = 60° + k \cdot 120°$; $x_2 = 270° + k \cdot 360°$; $x_3 = 135° + k \cdot 180°$.

605) I en vid A rätvinklig triangel ABC är $AC > AB$. På AC avsättes $AD = AB$. Bestäm kateternas förhållande, om BD delas i tre lika delar av den inskrivna cirkeln.

Svar: 3 : 4.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 603—612 äro insända av C. H.

606) På höjden AD i en liksidig triangel ABC tagas punkterna E och F så, att $3 \cdot AE = 2 \cdot AF = AD$. Visa, att de kring trianglarna BEC och BFC omskrivna cirklarna äro lika stora.

607) Bissektriserna till vinkeln A och dess yttervinkel i en triangel ABC råka den omskrivna cirkeln i D och E. Visa, att $AD : AE = (b + c)\, tg \frac{A}{2} : (b - c)$.

608) I varje rätvinklig heltalstriangel är produkten av mätetalen för hypotenusan och kvadraten på den ena katetmedianen en summa av formen $a^6 + b^6$, där a och b äro hela tal.

609) En cirkel med radien r har sin medelpunkt på en cirkel med radien R. Genom deras skärningspunkt dragas tangenter till cirklarna. Hur stora kordor utskära cirklarna av dessa tangenter?

Svar: $\sqrt{4R^2 - r^2}$ och $\frac{r}{R}\sqrt{4R^2 - r^2}$.

610) I en rätvinklig triangel ABC äro till hypotenusan, som är given till sin längd, dragna höjden AD, bissektrisen AE och medianen AO. Huru stora äro triangelns vinklar, då a) $\measuredangle ADO$, b) $\measuredangle AEO$, c) $\measuredangle ADE$ är så stor som möjligt?

Svar: De spetsiga vinklarna äro a) $22°{,}5$ och $67°{,}5$; b) $19°{,}08$ och $70°{,}92$; c) $25°{,}67$ och $64°{,}33$.

611) Två kongruenta, likbenta trianglar med sammanfallande höjder (längd $= h$) och spetsarna åt olika håll glida i höjdriktningen. För vilket avstånd mellan baserna blir a) den gemensamma ytan ett maximum; b) den volym, som alstras, om denna yta roterar kring höjdriktningen ett maximum?

Svar: a) $\frac{2h}{3}$ b) $\frac{h}{7}(6 - \sqrt{8})$.

612) För vilket värde på r tangerar cirkeln $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$ parabeln $y^2 = 2px$?

Svar: $r = \sqrt{p(2\alpha - p)}$ och $r = \alpha$.

613) Visa, att $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ och $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1{,}5$, om $\alpha + \gamma = 120°$ och $\beta - \gamma = 120°$.

614) Om P och P_1 äro punkter på två koncentriska cirklar och i dessa äro inskrivna liksidiga trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ resp., så är $\overline{PA_1}^2 + \overline{PB_1}^2 + \overline{PC_1}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{P_1B}^2 + \overline{P_1C}^2$.

615) I en triangel äro de tre medianerna dragna. Därvid uppkomma sex deltrianglar. De omskrivna cirklarnas radier äro R_1,

$R_2 \ldots R_6$, och de inskrivna cirklarnas radier äro r_1, $r_2 \ldots r_6$ tagna i ordning. Visa, att $R_1 . R_3 . R_5 = R_2 . R_4 . R_6$ och att

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

616) Visa grafiskt, att ekvationen $x^3 - 9x + m(x^2 - 1) = 0$ alltid har tre reela rötter.

617) I ett parallelltrapets $ABCD$ är en av de parallella sidorna AB given till längd ($= a$) och läge. Sidorna $AD = b$ och $DC = c$ äro givna till längd. Sök orten för diagonalernas skärningspunkt.

Svar: Cirkeln $\left(x - \frac{ac}{a+c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2$, om AB tages till x-axel med A som origo.

Lösningar till uppg. 551—553.

551) *Tre lika cirklar tangera varandra två och två samt dessutom alla en fjärde cirkel. Från en godtycklig punkt P på den sistnämnda cirkelns periferi dragas tangenterna PT_1, PT_2 och PT_3, en till var och en av de övriga cirklarna. Visa, att en av dessa tangenter (mätt från P till kontaktpunkten) alltid är lika med summan av de båda andra.* X.

Förenas de lika cirklarnas medelpunkter, fås en liksidig triangel $O_1O_2O_3$, vars omskrivna cirkel har centrum i Q; PQ råkar den sistnämnda cirkeln i P_1; QO_1 råkar den fjärde, givna cirkeln i tangeringspunkten S. Om PS råkar cirkeln O_1 i R, så är $PR = P_1O_1$. Ptolemeiska satsen tillämpad på fyrhörningen $P_1O_1O_2O_3$ ger $P_1O_1 + P_1O_3 = P_1O_2$. Nu är $PT_1^2 = PR . PS$, och om $PS = k . P_1O_1$, blir $PT_1 = P_1O_1\sqrt{k}$. På samma sätt är $PT_2 = P_1O_3\sqrt{k}$ och $PT_3 = P_1O_2\sqrt{k}$, varav satsens sanning framgår.

S. B. Även löst av *B—r.*

552) *Till en ellips läggas två parallella tangenter och från brännpunkterna normaler mot dessa. Bestäm maximum av den så bildade rektangelns yta.*

Om ändpunkterna A och B av en rektangelsida förenas med medelpunkten O, erhållas en likbent triangel, i vilken $OA = OB =$ = halva storaxeln. Max. inträffar alltså för $\sphericalangle AOB = 90°$ och ytans maximivärde $= 2a^2$, om $AB = a\sqrt{2} < 2c$ eller $e > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Minimivärden bli 0 och $4bc$. Om $e \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, blir maximivärdet $4bc$.

B—r. Även löst av *B. Edelstein.*

553) *En pyramid begränsas av fyra trianglar (tetraeder). Om r betyder den inskrivna sfärens radie, r_1, r_2, r_3 och r_4 de vidskrivna sfärernas radier, så är*

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}.$$

Förenas den inskrivna sfärens medelpunkt med hörnen, erhållas 4 delpyramider, alla med höjden r, varav

$$\frac{B_1 r}{3} + \frac{B_2 r}{3} + \frac{B_3 r}{3} + \frac{B_4 r}{3} = V \text{ eller } \frac{1}{r} = \frac{\Sigma B}{3V},$$

om V = volymen och B_1, B_2, B_3 och B_4 de 4 sidoytorna. På samma sätt fås

$$\frac{B_2 r_1}{3} + \frac{B_3 r_1}{3} + \frac{B_4 r_1}{3} - \frac{B_1 r_1}{3} = V \text{ eller } \frac{1}{r_1} = \frac{\Sigma B - 2B_1}{3V}$$

(4 ekv.), varav genom addition

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{3\Sigma B - 2\Sigma B}{3V} = \frac{1}{r}.$$

B—r.

Fysikaliska uppgifter.[1]

149. En inklinationsnål är inställd i magnetiska meridianplanet. Inklinationsvinkelns riktiga värde är 70°,8, men nålen visar icke mer än 69°,2 beroende på att upphängningsaxeln icke går genom tyngdpunkten. Huru mycket skall nålens svängningsplan vridas för att nålen skall få den riktiga inklinationen, 70°,8?

Svar: 23°,5.

150. Genom en induktionsspole sändes en likström av viss styrka, varvid spänningen mellan spolens klämskruvar är 12,4 volt. Därefter sändes genom spolen växelström, vars eff. strömstyrka är densamma som likströmmens styrka. En inkopplad växelströmsvoltmeter anger då 20,6 eff. volt. Beräkna härav fasdifferensen mellan spänning och ström.

Svar: $\varphi = 53°,0$.

151. En järnfri induktionsspole är direkt ansluten till en växelströmsledning med 127 volts eff. spänning. Strömstyrkan är 6,2 eff. amp. Spolens likströmsmotstånd är 1,3 ohm. Beräkna wattförbrukning och fasdifferens.

Svar: effekten = 165,(3) watt; $\varphi = 77°,9$.

[1] Uppg. 149—159 äro förf. av lektor T. Wetterblad.

152. Ett elektricitetsverk levererar till en fabrik enfas växelström genom ledningar, vilkas sammanlagda motstånd är 0,6 ohm. Spänningen vid förbrukningsorten är 400 eff. volt och den där tillgodogjorda effekten 12 kilowatt vid en fasfaktor 0,8. Beräkna spännings- och effektförlust i ledningarna. Dessa kunna anses induktions- och kapacitetsfria.

Svar: 22,5 volt; 0,84 kW.

153. Tätt ovanför objektivet till en avläsningskikare, vars optiska axel är horisontell, befinner sig en i millimeter graderad skala och 2 meter därifrån, räknat utefter kikarens optiska axel, planspegeln till en galvanometer. Spegelnormalen sammanfaller med optiska axeln. Objektivets fokaldistans är 50 cm, okularets 5 cm. Okularet inställes så, att skalan tydligt framträder för en observatör, som förlägger bilden mycket långt bort. Under vilken synvinkel iakttages avståndet mellan tvenne delstreck (1 mm)?

Svar: 9′,8.

154. Ett okular är sammansatt av tvenne tunna, positiva linser med brännvidden 6 och 2 cm resp.; avståndet dem emellan är 4 cm. Linsen med den största brännvidden är vänd mot kikarobjektivet, vars brännvidd är 60 cm. Ett avlägset föremål betraktas, och ögat förlägger bilden mycket långt bort. Beräkna kikarens förstoring.

Svar: 20 gånger.

155. Från en lysande punkt på huvudaxeln till en tunn positiv lins med 12 cm brännvidd utgår ett smalt, divergent strålknippe. På andra sidan linsen är placerat ett kärl med tunna planparallella glasväggar. Kärlet är fyllt med vatten och ställt så, att det 4 cm tjocka vattenskiktets begränsningsytor äro vinkelräta mot huvudaxeln. Var skall den lysande punkten ligga, för att strålknippet efter genomgång av lins och vattenskikt skall *tyckas* utgå från punkten ifråga? Vattnets brytningsexp. är $^4/_3$.

Svar: 3 cm från linsen.

156. En tunn bikonkav lins med bägge radierna = 8 cm och en tunn bikonvex lins med bägge radierna = 16 cm äro placerade på ett avstånd från varandra. Mot den förra linsen infaller ett knippe med huvudaxeln parallella strålar (vitt ljus). Huru stort skall avståndet mellan linserna vara, för att röda strålar och blå strålar, för vilka glasets brytningsexponent är 1,60 resp. 1,64, efter brytning i bägge linserna skola ha sammanfallande bildpunkt? Blir denna reell eller virtuell?

Svar: 2,7 cm (virtuell bild).

157. En gitterspektrometer med gittret uppställt vinkelrätt mot kollimatorns optiska axel skulle användas för att alstra monokromatiskt ljus av våglängden 0,000700 mm. För den skull belystes kollimatorn först med en kopparljusbåge, och de bägge lägen, då den gröna linjen med våglängden 0,000522 mm i andra ordningens spektrum syntes falla på kikarens hårkors, avlästes. Dessa lägens vinkelavstånd var 106°,40. Därefter borttogs kikarens okular och ersattes med ett rör, innehållande en fin vertikal spalt. Spaltplanet bragtes att sammanfalla med objektivets fokalplan och spaltens längdriktning gjordes parallell med kollimatorspaltens. Huru mycket måste kikarröret med spalten vridas ur det läge, då den ljusa centralbilden faller på spalten, för att den önskade ljussorten skall utträda genom spalten i första ordningens spektrum?

Svar: 32°,48.

158. På en plan glasplatta lägges ett tunnt, med ett hål försett papper. Däröver är placerad en annan, planparallell glasplatta. Plattorna avgränsa i hålet ett luftskikt, vars tjocklek är 0,009 mm. Vinkelrätt mot den övre plattan infaller vitt ljus. De vid den övre och den undre sidan av luftskiktet reflekterade ljusstrålarna interferera med varandra, och ljus av vissa våglängder utsläckes härvid. Det reflekterade ljuset betraktas genom ett spektroskop, varvid mörka linjer synas i spektrum. Huru många dylika linjer ligga mellan våglängderna 0,000589 mm (D-linjen) och 0,000656 mm (C-linjen)?

Svar: 3 linjer.

159. För strålningsförsök användes en i ett evakuerat glaskärl innesluten liten grafitplatta, vilken elektriskt upphettades på samma sätt som en vanlig glödlampa. Då 5,2 watt tillfördes plattan, visade en upptagning av den emitterade strålningens intensitetskurva, att denna hade ett maximum för $\lambda = 0{,}0020$ mm. Huru många watt måste tilföras, för att motsvarande maximum skall inträffa för $\lambda = 0{,}0016$ mm. All tillförd energi antages omsatt i strålning. Plattans temperatur är så hög, att ingen hänsyn behöver tagas till omgivningens instrålning.

Svar: 12,7 watt.

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1933.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I triangeln ABC är vinkeln A trubbig. Triangelns yta är 1 650 m², sidorna AB och AC resp. 65,52 m och 72,84 m. Hur stor är vinkeln A?
2. Sex tal bilda geometrisk serie. Deras logaritmer med avseende på basen 10 bilda aritmetisk serie med differensen -1 och med summan 9. Vilka äro talen?
3. A, B, C och D äro fyra på varandra följande hörn i en regelbunden femtonhörning, vars sida är 2 cm. Beräkna ytan av parallelltrapetset $ABCD$.
4. En av vinklarna i en liksidig triangel är genom en rät linje delad i förhållandet 4 : 5. I vilket förhållande delas den motstående triangelsidan av nämnda linje?
5. Två orter ha båda nordlig latitud 58° 35′; den enas longitud är 5° 25′ ostlig, den andras 30° 45′ västlig. Beräkna avståndet längs breddcirkeln mellan orterna. Jordens omkrets är 4 000 mil.
6. En affärsman vill genom lika stora årliga insättningar under 30 år i en bank skaffa sig så stort kapital, att han därefter kan under 25 år årligen vid samma tid på året uttaga 6 000 kronor för sitt uppehälle. Till vilket belopp måste varje insättning uppgå, om ränta på ränta kan påräknas efter $4\,{}^1/_2\,\%$?
7. En godtycklig punkt innanför en triangel har avstånden x, y, z till triangelns sidor. De motsvarande höjderna i triangeln äro h, k, l. Visa, att $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}+\frac{z}{l}=1$.
8. En cirkel har medelpunkten O och radien $= 4$ cm. AB är en diameter i cirkeln, och OC är en mot AB vinkelrät radie. Man konstruerar den cirkel, som går genom punkterna A, B och mittpunkten av OC. Beräkna ytan av den del av denna cirkel, som ligger utanför den förstnämnda cirkeln.

Resultat: **1.** 136°,24. **2.** 10 000; 1 000; 100; 10; 1; 0,1. **3.** 3,113 cm². **4.** 0,8170. **5.** 2 095 km. **6.** 1 458 kr. **8.** 42,24 cm².

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Bestäm alla värdesystem x, y, som satisfiera ekvationssystemet

$$x(x^2 - y^2) = 4,$$
$$(x - y)^2 + (x + y)^2 = 12.$$

2. Bestäm medelpunkten i en cirkel med given radie R, då cirkeln i två punkter tangerar en given parabel $y^2 = 2px$.
3. A, B, C, D och E äro fem på varandra följande hörn i en regelbunden niohörning. I vilket förhållande delas diagonalen AD av diagonalen CE?
4. I en av de punkter, där kurvorna

$$x^2 + y^2 + 4x = 9, \quad 2x^2 + 3y^2 = 14$$

skära varandra, dragas tangenterna till kurvorna. Dessa båda tangenter bilda tillsammans med x-axeln en triangel. Beräkna triangelns yta.

5. I en tresidig pyramid $ABCT$ är basytan ABC en liksidig triangel. De tre från T utgående kantlinjerna äro lika långa och var och en dubbelt så lång som AB. Ett plan skär kantlinjen TA i punkten A' så, att $TA' = {}^1/_4$ av TA, samt kantlinjerna TB och TC i punkterna B' och C' resp. så, att $TB' = TC' = 3\,TA'$. Beräkna vinkeln $B'A'C'$ i den triangel $A'B'C'$, som planet utskär av pyramidens sidoytor.
6. Bestäm maximi- och minimipunkterna på kurvan

$$y = \cos^2 x + 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

och teckna kurvan i stora drag.

7. I den likbenta triangeln ABC äro sidorna AC och BC lika långa. En rörlig, mot AB (eller dess förlängning) vinkelrät linje skär AC eller dess förlängning i punkten E och BC eller dess förlängning i punkten F. Sammanbindningslinjerna AF och BE råkas i punkten P. Sök orten för P.
8. OAB är en given cirkelsektor med medelpunkten O, medelpunktsvinkeln $AOB = 2v$, som antages mindre än 120°, och radien $OA = OB = r$. I densamma inskrives en ny sektor $O_1A_1B_1$ med samma medelpunktsvinkel $2v$, vars medelpunkt O_1 ligger i mittpunkten av bågen AB; radiernas ändpunkter A_1 och B_1 ligga på radierna OA resp. OB. I sektorn $O_1A_1B_1$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_2A_2B_2$ med medelpunktsvinkeln $2v$, så att sålunda O_2 ligger i mittpunkten av bågen A_1B_1 och att A_2 och B_2 ligga på O_1A_1 resp. O_1B_1. I sektorn $O_2A_2B_2$ inskrives på analogt sätt en sektor $O_3A_3B_3$ med medelpunktsvinkeln $2v$,

o. s. v. Man får på detta sätt en oändlig följd av sektorer, vilkas medelpunkter obegränsat närma sig en viss punkt. Bestäm denna punkts läge.

9. Två cirklar tangera varandra utantill i A. En rät linje tangerar cirklarna i B och C och skär förlängningen av sammanbindningslinjen mellan deras medelpunkter i P. Bevisa, att $PB \cdot PC = (PA)^2$.

Resultat: **1.** $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & -1 & 2 & 2 \\ \hline y & \sqrt{5} & -\sqrt{5} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{array}$, där de båda första paren skola räknas två gånger (d. v. s. resp. funktionskurvor tangera varandra i dessa punkter). **2.** Medelpunktens koordinater äro $\left(\frac{R^2+p^2}{2p};\ 0\right)$. **3.** $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} = 5{,}411$. **4.** $4\frac{2}{3}$ ytenheter. **5.** $40^\circ{,}26$. **6.** Om funktionen skrives $y = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, erhållas omedelbart maximivärdena 1 och 3 för resp. $x = n \cdot 360^\circ$ och $x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ samt minimivärdet $\frac{3}{4}$ för $x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$. **7.** Ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, om koordinaterna för A $(a;\ 0)$, för B $(-a;\ 0)$ och för C $(0;\ b)$. **8.** Punktens avstånd från sektorns medelpunkt är $\frac{2r \cdot \cos v}{1 + 2\cos v}$. **9.** Lägg en cirkel genom A, B och C.

Uppgifter i fysik.[1]

1. En flaska har två halsar, den ena anbragt å flaskans översta del, den andra å flaskans sida. Den förra är överbunden med en vattentätt tillslutande hinna, den senare tillsluten medelst en propp, genom vilken den ena skänkeln till en öppen kvicksilvermanometer är införd. Manometerns båda skänklar stå vertikalt och ha samma inre radie. Flaskan är helt fylld med vatten, och även den skänkel av manometern, som är förbunden med flaskan, är fylld med vatten fram till kvicksilverytan. Man trycker med fingret på hinnan, så att kvicksilvret i den fria skänkeln stiger 1 cm. Huru mycket ändras därvid den på flaskans botten verkande tryckkraften? Flaskans botten kan anses vara plan och cirkulär med en radie av 6 cm (inre mått). Kvicksilvrets spec. vikt är 13,6.
2. Vid vardera änden av ett snöre, som löper över en lättrörlig trissa, hänger en vikt på 2 kg. Systemet befinner sig i vila. Därefter lägges på den ena vikten en övervikt på 1 kg, varvid systemet kommer i rörelse. Huru mycket ändras därvid trycket

[1] Angående problem 6 se sid. 107 och ang. problem 3 se noten sid. 107.

på trissans axel? Friktionen ävensom trissans och snörets inflytande lämnas utan avseende.

3. Genom ett fint rör utströmmar en stråle heliumgas i ett rum, där vakuum råder. I strålens väg äro två tandhjul anbragta, vilka sitta på samma axel, det ena 3,1 cm bakom det andra. Vartdera hjulet har 408 tänder. Tänder och mellanrum äro lika breda, och hjulens tjocklek kan lämnas utan avseende. Vid försökets början äro hjulen i vila och intaga ett sådant läge, att gasstrålens molekyler passera vart och ett av hjulen i mellanrummet mellan två tänder. Försättas hjulen i rotation, kunna molekylerna, sedan de sluppit genom ett mellanrum i det första hjulet, allt efter omständigheterna hejdas av en tand i det andra hjulet eller slippa genom ett mellanrum. Gasstrålen innehåller molekyler av olika hastighet. Bland dessa finnas molekyler med sådan hastighet, att de passera det första hjulet mitt emellan två tänder och det andra likaledes mitt emellan två tänder, dock så att en tand under mellantiden passerat gasstrålens väg. Beräkna hastighet och rörelseenergi (den senare uttryckt i erg) för en sådan molekyl, om hjulen fullborda 133 varv i sekunden. En heliummolekyl väger $6{,}60 \times 10^{-24}$ gr. Molekylernas rörelse kan anses vara likformig och rätlinig.
4. En järncylinder med 20 cm höjd flyter upprätt i ett kärl med kvicksilver. Temperaturen hos hela systemet är först 0° C, men höjes sedan till 100° C. Huru mycket sjunker därvid järncylinderns undre yta i förhållande till kvicksilverytan? Spec. vikterna vid 0° C äro för järn 7,80, för kvicksilver 13,60. Längdutvidgningskoefficienten för järn är 0,000012 och volymsutvidgningskoefficienten för kvicksilver 0,000182.
5. Huvudsnittet i ett rakt, tresidigt glasprisma utgöres av en rätvinklig triangel *ABC*, där vinkeln *A* är 90° och vinkeln *C* 30°. Vinkelrätt mot sidan *BC* infaller enfärgat ljus. Prismat vrides sedan en vinkel av 49° kring en axel, som går genom *B* och som är vinkelrät mot huvudsnittet. I denna ställning brytas de infallande strålarna i sidan *BC* och träffa sidan *AC* under rät vinkel. Beräkna glasets brytningsexponent.
6. Man förfogar över en positiv lins av kvarts, vars brytningsexponent för synligt ljus kan sättas lika med 1,55, men för mycket långvågiga, ultraröda strålar är 2,15. På linsens optiska huvudaxel är en ljuskälla uppställd, vilken utsänder båda strålsorterna och kan anses vara punktformig. Linsen är infattad i en cirkulär ring av 3 cm inre radie. På den andra sidan om linsen är en skärm uppställd vinkelrätt mot linsens optiska

huvudaxel. Ljuskällan och skärmen befinna sig lika långt från linsen på ett sådant avstånd, att de långvågiga strålarna sammanbrytas till en punkt på skärmen. Beräkna radien i den ljusfläck de synliga strålarna då alstra på skärmen. Linsen kan anses vara tunn, och dess brännvidd för synligt ljus är 25 cm.

7. En horisontell, cirkulär strömbana består av en enkel trådslinga med 15 cm radie. Genom tråden går en ström på 5 amp. i sådan riktning, att det magnetiska fält, som av strömmen alstras i cirkelns medelpunkt *O*, är riktat rätt uppåt. Sök resultanten i punkten O av detta fält och det jordmagnetiska fältet. Det senares horisontella komposant är 0,160 C. G. S.-enheter; inklinationen är 71°.

8. Ett ackumulatorbatteri består av 30 stycken seriekopplade element, vartdera med en elektromotorisk kraft av 2,0 volt och ett inre motstånd av 0,3 ohm. Batteriet är slutet genom en tråd *AB*, vars motstånd är 500 ohm, varvid punkten *A* förbundits med den positiva polen och *B* med den negativa. Mittpunkten *C* av batteriet är förbunden med jorden (dess potential är noll). *D* är en punkt på *AB* så belägen, att *AD* har ett motstånd av 100 ohm. Huru mycket sjunker potentialen i *D*, om punkterna *C* och *D* förbindas medelst en ledning, vars motstånd är 1 000 ohm?

Resultat: **1.** 2,963 kgf. **2.** 0,8 kgf. **3.** 1683 m/sek; $9{,}344 \cdot 10^{-14}$ erg. **4.** 1,8 mm. **5.** 1.509. **6.** 3,13 cm. **7.** Under förutsättning att orten i fråga ligger på norra halvklotet blir resultanten 0,301 *C.G.S.*-enheter; den är riktad nedåt och bildar med horisonten vinkeln 57°,9 **8.** 1,35 volt.

Realskolexamen V. T. 1933.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{0{,}5 - 2x}{x + \frac{1}{6}} - \frac{\frac{3}{4} - x}{0{,}5x + \frac{5}{12}} = 0.$$

2. En person, som äger en förmögenhet på 9 000 kr., placerar hälften i 4 % obligationer, som han köper till 90 % kurs, och

hälften i en bank, som ger $4\,^1/_2\,\%$ ränta. Beräkna hans årliga ränteinkomst.

3. I triangeln ABC äro D och E de punkter, där bissektriserna till vinklarna A och B skära motstående sidor. Bestäm gradtalen för vinklarna A, B och C, då $\angle\, CDA = 85°$ och $\angle\, AEB = 100°$.
4. En handlande inköpte ett varuparti per extra kontant. En månad senare sålde han detsamma med en förlust, som uppgick till $5\,\%$ av det pris, vari varupartiet då stod honom, därvid han beräknat ränta å sitt utlagda kapital efter $4\,\%$ per år. Hur stort var inköpspriset, då försäljningspriset uppgick till 5 719 kronor?
5. En person betalade i hyra för en våning med värme, varmvatten och badrum 3 500 kr. för år. Då han ansåg detta för dyrt, sökte han till nästa år en annan, lika stor våning och erbjöds en sådan för 2 400 kr. om året, men utan värme, varmvatten och badrum. Han beräknade kostnaden för värme till 300 kr., för varmvatten till 30 kr. om året och uppskattade kostnaden för bad för sig och familjen till 125 kr. per år. Den förra hyresvärden erbjöd sig emellertid att sänka hyran med $8\,\%$. Med hur många procent av den sänkta hyran för den första våningen kunde han minska sina utgifter för bostad (med värme, varmvatten och bad) genom att hyra den andra våningen för 2 400 kr.?
6. I ett parallelltrapets äro de parallella sidorna 3,5 cm och 4,5 cm. Avståndet mellan dessa sidor är 2,8 cm. De icke parallella sidorna utdragas, tills de skära varandra, varvid en triangel med basen = 3,5 cm uppkommer. Beräkna denna triangels yta.
7. Om vid ett val mellan två personer A och B $^1/_8$ av dem, som röstade på A, hade underlåtit att rösta, skulle B erhållit 217 röster mer än A. Hade $^1/_{10}$ av dem, som röstade på B, i stället röstat på A, skulle A erhållit 376 röster mer än B. Hur många röster fick vardera?
8. Ett tält har formen av en pyramid, i vilken basytan är en kvadrat med sidan 2 m. Sidoytorna äro likbenta trianglar med de lika sidorna vardera 2,5 m. Beräkna tältets volym.

Resultat: **1.** $x = \frac{1}{14}$. **2.** 402,50 kr. **3.** $A = 50°$; $B = 60°$; $C = 70°$. **4.** 6 000 kr. **5.** $11{,}3\,\%$. **6.** $17{,}15\ \text{cm}^2$. **7.** A fick 1 832 röster och B 1 820. **8.** $2{,}75\ \text{m}^3$.

Molekylstrålar.

Av BENGT BECKMAN.

Enligt den kinetiska gasteoriens grundantagande befinna sig molekylerna i en gas i en fullständigt oordnad d. v. s. kaotisk rörelse. Den bana, som en molekyl vid sin rörelse beskriver, är sammansatt av sicksackformade, rätliniga sträckor; varje förändring av rörelsens riktning svarar mot en stöt, som sker antingen mot en annan molekyl eller mot väggen till det kärl, i vilket gasen är innesluten.

Molekylerna i en gas ha ej alla samma hastighet, och man kan ej förutsäga, hur stor hastighet en viss molekyl äger vid ett visst ögonblick. Men de enskilda molekylernas hastigheter fördela sig statistiskt kring ett medelvärde, som är en enkel funktion av gasens temperatur. Den sträcka, som en molekyl i medeltal går mellan två stötar, kallas den fria medelväglängden. Denna storhet beror på antalet molekyler per volymsenhet, således på gasens tryck. Då trycket minskas, ökas medelväglängden. Existensen av storheterna medelhastighet och medelväglängd, som bland andra karakterisera en gas i ett visst tillstånd, beror på det förhållandet, att man har att göra med ett enormt antal molekyler och således i den kinetiska gasteorien kan tillämpa statistikens lagar.

Ett gasfyllt kärl A (se fig. 1 a) sättes genom ett fint hål i förbindelse med ett annat kärl B, där *vakuum* råder. Gasmolekylerna strömma då genom öppningen ut i rummet B. Vi antaga, att hålets diameter är mycket liten i förhållande till den fria medelväglängden i A. I närheten av hålet förekomma mycket få stötar mellan molekylerna, och de molekyler, som närma sig väggen mellan A och B mitt för hålet,

flyga över i B utan att störas i sin rörelse, förrän de träffa väggen i B. Rörelsen hos dessa molekyler är ej längre kaotisk, utan ordnad. Molekylerna röra sig alla i rätliniga banor, som strålformigt utgå från hålet i mellanväggen. Molekylerna ha dock olika hastighet, varav blir en följd, att en hastigare molekyl kan upphinna och stöta till en långsammare. Genom en bländaröppning anbragt på lämpligt avstånd kan man avskilja alla molekyler, som röra sig i en viss riktning; man får då en *molekylstråle* (se fig. 1 b). I en sådan förekomma inga andra stötar än de nyss nämnda, vilka dock äro relativt sällsynta. Molekylstrålarna ge oss ett medel att direkt studera många egenskaper hos mole-

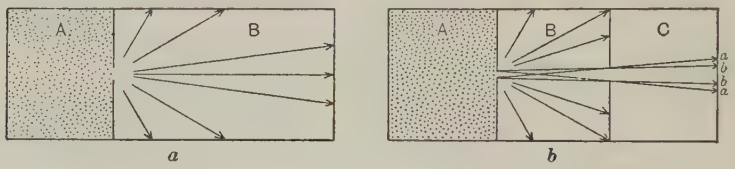


Fig. 1 a och b. Framställning av en molekylstråle.

kylerna, som eljes endast ha kunnat beräknas med statistiska metoder. Molekylstrålarna ha därigenom fått en mycket stor betydelse för den experimentella fysiken.

Dessa teoretiska betraktelser bekräftades på ett slående sätt av L. Dunoyer 1911, som väl får betraktas som pionjären på detta område. Han hade ett cylindriskt glaskärl 20 cm i längd, delat i tre avdelningar medelst två mellanväggar, försedda med fina cirkulära hål (se fig. 1 b). Röret evakuerades väl och litet natrium infördes i delen A. Då metallen upphettades, uppstod ett skarpt begränsat metallbeslag vid rörets motsatta ände med just det utseende, som man kan vänta, om natriummolekylerna rört sig i rätliniga banor. Han observerade både en kärnskugga *bb* och en halvskugga *ab* av de dimensioner, som framgå av de geometriska förhållandena. Föremål, som placerades i strålens väg, avtecknade sig skarpt mot beslaget. Om vakuum i de två delarna B och C av röret ej är tillfredsställande, blir

strålen diffus och beslaget ej skarpt tecknat. Ett av villkoren för att man skall få en skarpt begränsad molekylstråle, är att den fria väglängden i den evakuerade delen av röret är stor i förhållande till rörets dimensioner.

Efter detta grundläggande försök ha molekylstrålarna ingående studerats i främsta rummet av O. Stern och hans medarbetare vid institutet för fysikalisk kemi i Hamburg; där har utvecklats en allt mera fulländad teknik för utforskandet av dessa strålar.

Det råder en bestämd skillnad mellan en molekylstråle och en ång- eller gasstråle. I den förra finnas praktiskt taget inga stötar och rörelsen hos alla molekyler är riktad åt samma håll. I en ångstråle förekomma hastigheter av olika riktningar och stötar mellan molekylerna. Den kan därför ej bibehålla sin form i vakuum mer än på några få millimeters väg. Molekylstrålen övergår i gasstråle, om trycket i källan (rummet A i fig. 1) höjes tillräckligt d. v. s. om den fria väglängden i A blir liten i förhållande till hålets diameter.

En apparat för framställning av molekylstrålar består som ovan nämnts av ett slutet kärl med tre avdelningar; i vardera mellanväggen finnes en fin öppning. De tre rummen kallas strålningskällan (A), kollimator- och observationsrummet (B resp. C). Strålningskällan har ofta formen av en ugn, i vilken man inför en liten kvantitet av den substans, som skall undersökas. Först evakueras hela apparaten och därefter upphettas ugnen till så hög temperatur, att substansen förgasas. Strålningskällan kan också vara ett gasfyllt rör, ytan av en smälta eller en upphettad tråd.

Vid försöken är det av stor vikt, att man får intensiva molekylstrålar; å andra sidan bör strålknippet vid många mätningar vara smalt d. v. s. dimensionerna hos hålet skola vara små. Härigenom sättes en undre gräns för den fria väglängden; trycket i strålningskällan får ej höjas för mycket. Vanligen består öppningen mellan A och B av en fin spalt med en bredd av $0{,}_{01} - 0{,}_{1}$ mm.

De strålar, som lämna denna spalt, bilda en strålkon. Öppningen i väggen mellan kollimatorrummet och observationskammaren släpper endast igenom de molekyler, vilkas rörelseriktning sammanfaller med apparatens längdaxel. Den har vanligen formen av en spalt och kallas bildspalt. De molekyler, som träffa den yttre väggen i B, kunna där reflekteras och öka gastrycket i kollimatorrummet; de försvaga genom stöt det centrala strålknippet. För att förhindra reflexion mot väggarna brukar man ofta avkyla ytterväggarna, så att molekylerna där kondenseras. Dessutom låter man pumparna gå under försöket.

I observationsrummet befinner sig detektorn, den apparat, med vilken molekylstrålarna påvisas eller deras intensitet mätes. Man kan uppdela detektorerna i två klasser efter deras motsvarighet inom optiken. Den första klassen — additiva detektorer — svara mot den fotografiska metoden inom optiken, den andra mot den fotoelektriska cellen eller termostapeln.

De additiva detektorerna kvarhålla på sin yta de molekyler, som träffa dem. Antingen sker detta genom kondensation eller därigenom, att strålens molekyler kemiskt reagera med detektorn. I förra fallet användes en glas- eller metallplatta, som avkyles så mycket, att alla molekyler fastna vid plattan. Ofta är beläggningen så tunn, att den ej synes. Den kan då framkallas med lämplig metod. Man kan införa en metallånga vid lågt tryck i apparaten t. ex. kvicksilver; ångan kondenseras huvudsakligen på beslaget och gör detta synligt. De additiva detektorerna kunna visa en mycket stor känslighet, men lämpa sig ej så väl för kvantitativa bestämningar.

Bland detektorer av den andra klassen märkes först och främst manometern. Observationsrummet är ett slutet evakuerat kärl och molekylerna av en gas t. ex. H_2, O_2, He inkomma genom bildspalten. Trycket i observationsrummet ökas därvid, och det kan mätas med en manometer. Med kännedom om apparatens dimensioner, temperaturen

och tryckökningen kan man beräkna massan av den gas, som kommit in genom spalten. Detektorns känslighet ökas, om spalten får formen av en kanal, varigenom molekylerna i observationsrummet bättre hindras att åter strömma ut.

De små tryck, som här förekomma, ha storleksordningen 10^{-5} mm Hg och mätas vanligen med en varmtrådsmanometer. Denna består av ett mycket tunt, smalt nickelband, som upphettas av en elektrisk ström, tills ett stationärt tillstånd inträder d. v. s. bandets temperatur och motstånd bli konstanta. Strömvärmet kompenseras då av det värme, som bortgår genom ledning i gasen och strålning. Vanligen utgör nickelbandet en av de fyra grenarna i en Wheatstones brygga. Man reglerar batteriströmmen, tills bandets motstånd blir konstant. Som mått på trycket tjänar galvanometerns utslag; vid små tryck råder proportionalitet mellan dessa storheter. Manometern kan graderas empiriskt för absoluta mätningar. Stern och Knauer ha drivit upp mätnoggrannheten ofantligt. Vid en mätning var utslaget 1—2 mm för en tryckändring av 10^{-8} mm Hg. Den direkta strålen åstadkom vid detta försök en höjning av trycket på 10^{-5} mm, motsvarande ett utslag av flera meter.

Ytjonisationsdetektorn grundar sig på det av Langmuir upptäckta förhållandet, att en alkaliatom, som träffar en glödande volframtråd, till denna avger en elektron och bortgår som positiv jon. Detektorn består av en glödtråd av volfram utspänd utmed axeln till en ihålig metallcylinder. Mellan tråden och cylindern finnes en spänning på c:a 10 volt, så att tråden har högre potential än cylindern. I den senare är vidare upptagen en smal spalt, genom vilken strålar av alkaliatomer inkomma. För varje atom, som träffar glödtråden, bildas en positiv jon, som på grund av det elektriska fältet går till metallcylindern. Jonisationsströmmen mätes med en galvanometer. Metoden, som utarbetats av Taylor på Sterns laboratorium, är ytterst känslig och tillåter mycket noggranna mätningar.

Dunoyers försök bevisade riktigheten av den kinetiska

gasteoriens grundantagande, att molekylerna mellan två stötar befinna sig i rätlinig rörelse. Dunoyer ansåg, att man på den inslagna vägen skulle kunna experimentellt verifiera den kinetiska gasteoriens beräkningar. Hit hör i främsta rummet frågan om molekylernas hastighet. Enligt Maxwells fördelningslag är antalet molekyler, vilkas hastighet ligger mellan värdet v och $v + dv$, angivet genom formeln

$$dn = \frac{4n}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \cdot v^2 dv,$$

där α är en konstant, den sannolikaste hastigheten, och n antalet molekyler per cm³. Avsättes konst. $\times \frac{dn}{dv}$ som ordi-

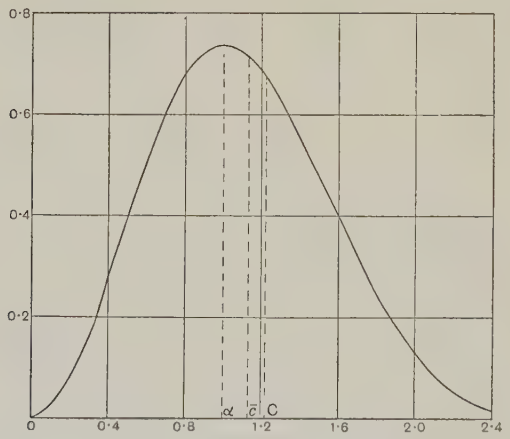


Fig. 2. Grafisk framställning av Maxwells fördelningslag.

Utefter ordinataxeln: konst $\times \frac{dn}{dv}$.
» abscissaxeln: v/α.

nata och v/α som abscissa, erhålles kurvan i fig. 2. För värdet $v = \alpha$, har kurvan ett maximum. Kurvan är ej symmetrisk kring α-ordinatan. Av intresse är medelhastigheten $\bar{c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha = 1{,}13\,\alpha$ samt medelvärdet på hastig-

hetskvadraten $C^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$; $C = 1{,}22\,\alpha$. Den kinetiska gasteorien ger dessa storheter, då $\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, där k är Boltzmanns konstant, T den absoluta temperaturen och m molekylens massa.

En första approximativ bestämning av molekylernas hastighet gjordes redan 1920 av Stern (se fig. 3). I centrum av en evakuerad cylinder V med radien l finnes ett gasfyllt kärl O med en spalt S_1. En andra spalt S_2 avskärmar ett knippe molekylstrålar, som träffar cylindern i punkten P.

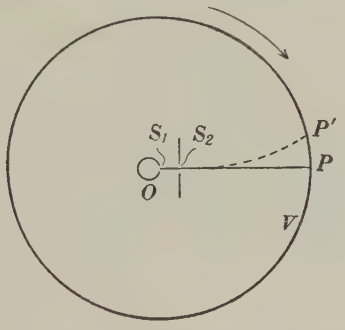


Fig. 3. Apparat för direkt mätning av molekylernas hastighet.

Hela cylindern försättes i rotation med konstant hastighet kring en axel genom S_1. En molekyl med hastigheten v behöver då tiden $t = \frac{l}{v}$ för att nå fram till cylindern. Men under denna tid har en punkt på cylindern förflyttat sig bågen $s = 2\pi nlt$, då n är antalet varv per sekund. En molekyl, som träffade cylindern i punkten P, då apparaten var i vila, råkar nu cylindern i punkten P′, där bågen PP′ är

$$s = 2\pi n \frac{l^2}{v}.$$

Om $n = 50$, $l = 10$ cm, är för $v = 5 \times 10^4$ cm/sek, $s = 6$ mm.

För kontroll av Maxwells fördelningslag använde Lammert 1929 en metod, som påminner om Fizeaus för bestäm-

ning av ljusets hastighet (se exempel 3 i studentuppgifter för vt. 1933). Två tunna cirkulära metallskivor sitta på samma axel, som är parallell med strålens väg. I de båda skivorna äro uppslitsade 50 spalter i radiell led på exakt samma sätt. Spalterna i den bakre skivan sitta rätt bakom spalterna i den främre. Vi tänka oss först, att systemet är i vila och att en av den främre skivans spalter sitter mitt för strålningskällans spalt. Hela molekylstråleknippet går genom två motsvarande spalter (1 resp. 2) i de båda skivorna och träffar oförsvagat den bakom spalt 2 placerade detektorn. Om systemet försättes i rörelse med vinkelhastigheten ω, träffa de olika molekylerna den bakre skivan i punkter, som äro förskjutna vinkeln $\delta = \omega l/v$ i förhållande till spalten 2 (avståndet mellan skivorna är l och hastigheten hos en molekyl v). Om vinkelavståndet mellan två närliggande öppningar är δ och vinkelbredden hos en spalt är 2 γ passera genom den nästföljande spalten i den bakre skivan alla molekyler, vilkas hastighet ligger mellan värdena v_1 och v_2, där

$$v_1 = \frac{\omega l}{\delta - \gamma}, \qquad v_2 = \frac{\omega l}{\delta + \gamma}.$$

Om man således vill utvälja ett hastighetsintervall mellan v_1 och v_2, bör antalet varv per sekund hos systemet vara

$$n = \frac{\gamma}{\pi l} \cdot \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}.$$

Genom en särskild anordning med utskurna sektorer i de båda skivorna kunde Lammert samtidigt mäta dels intensiteten hos det totala strålningsknippet dels intensiteten hos den del av knippet, som härrörde från de molekyler, vilkas hastighet ligger i intervallet v_1 till v_2. De fem olika intervallen 140—190, 190—240, ... 340—390 m/sek erhöll han genom att variera varvtalet och vrida den bakre skivan i förhållande till den främre.

Lammerts apparat synes i fig. 4. G är ett evakuerat kärl, O en ugn, strålningskällan, S kollimatorrummet och A observationsrummet. Ugnen, som stöder på en metallarm K, upphettades på elektrisk väg. Mellan ugnens spalt och bildspalten B finnes rotationsapparaten med de två skivorna ZZ. Dessa bilda ändytorna till en ihålig järncylinder R (diameter 5,7 cm, längd 6 cm). Järncylindern tjänar som rotor till statorn St, vilken omger apparaten. Rotorns has-

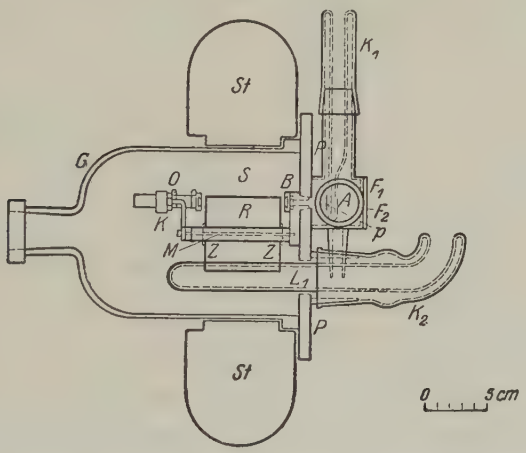


Fig. 4. Lammerts apparat för kontroll av Maxwells fördelningslag.

tighet bestämmes stroboskopiskt. Molekylstrålarna utgöras av kvicksilveratomer, som slutligen kondenseras på en silverdetektor, kyld med flytande luft. Övriga detaljer kunna ej här anföras.

Lammert fann god överensstämmelse mellan teori och experiment för kvicksilveratomer, vilka utsänts vid 100° C. Till samma resultat kom Eldridge med en modifierad metod beträffande kadmiummolekyler, som emitterades vid 400° C. Även de absoluta värdena på hastigheten stämma väl med de teoretiskt beräknade. Med Lammerts anordning kan man framställa homogena molekylstrålar, vilkas hastighet är begränsad till ett litet intervall. Det är naturligtvis vid

försök med molekylstrålar av stor vikt att kunna framställa strålar med konstant hastighet.

Molekylernas magnetiska egenskaper ha studerats genom mätningar av molekylstrålarnas avböjning i inhomogena magnetfält. Dessa undersökningar ha givit resultat av stor teoretisk betydelse. En paramagnetisk molekyl kan i magnetiskt avseende betraktas som en liten magnet, en dipol, med ett visst magnetiskt moment μ. Stern och Gerlach ha studerat molekylstrålarnas avböjning i ett magnetfält av följande utseende. I fig. 5 är A ett kilformat polstycke till

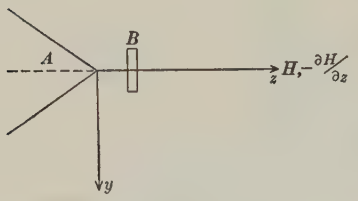


Fig. 5.

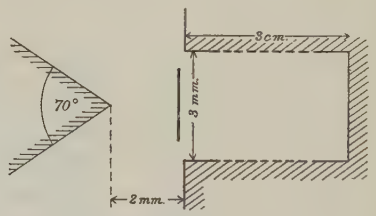


Fig. 6.

Stern och Gerlachs anordning för alstrande av inhomogent magnetfält.

en elektromagnet; eggen ligger vinkelrätt mot papperets plan utmed X-axeln. I det andra polstycket finnes en djup fåra (se fig. 6). Strålknippet B i fig. 5 rör sig parallellt med eggen. Fältstyrkan (H) är riktad vinkelrätt mot strålens bana således utmed Z-axeln och varierar starkt utmed denna axel (se fig. 5). På varje molekyl verkar då i Z-axelns riktning en kraft

$$F = \mu_i \frac{\partial H}{\partial z},$$

där $\mu_i = \mu \cos \vartheta$ (ϑ är vinkeln mellan fältets riktning och dipolens axel). Denna kraft ger upphov till en acceleration utmed OZ

$$f = \frac{F}{m} = \frac{\mu_i}{m} \frac{\partial H}{\partial z},$$

(m är som förut molekylens massa). Om molekylen på

tiden t genomlöper sträckan l i detta fält med hastigheten v, får den därvid en deviation (s) utmed OZ

$$s = \tfrac{1}{2} f t^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\mu_i}{m} \frac{l^2}{v^2} \frac{\partial H}{\partial z} = \tfrac{1}{4} \mu_i \frac{l^2}{E} \frac{\partial H}{\partial z}, \qquad (1)$$

där E är molekylens kinetiska energi. Av storheterna i denna ekvation uppmätas s, l och $\frac{\partial H}{\partial z}$. Med kännedom om den kinetiska energien kan man då beräkna μ_i, molekylens magnetiska moment i fältets riktning. Mätningar av detta slag äro ytterst delikata och förknippade med stora svårigheter. Deviationen är i allmänhet mycket liten t. ex. 0,06 mm. Noggrannheten kan drivas till c:a 2 %. Dessa mätningar ge oss viktiga upplysningar om molekylens magnetiska egenskaper. De ha ej endast givit exakta värden på molekylens magnetiska moment, utan även lämnat värdefulla bidrag till kännedomen om energinivåerna inom molekylen. En tolkning av resultaten är svår för det allmänna fallet, då i molekylen ingå två eller flera atomer. I regel har man endast kunnat studera de magnetiska egenskaperna för *atomstrålar.*

Enligt den klassiska teorien äro molekylernas magnetiska axlar orienterade likformigt i olika riktningar. Storheten μ_i kan för de olika molekylerna antaga vilket värde som helst mellan värdet O och μ. Den avböjande kraften skulle således kunna antaga alla värden mellan O och $\mu \frac{\partial H}{\partial z}$. Utan fält ger det smala strålknippet en »bild» i form av en linie; när det magnetiska fältet kopplas in, skulle denna bild åt båda håll bredas ut i ett band med konstant intensitet. Således skulle *homogena* atomstrålar av vilken atom som helst ge samma magnetiska deviationsbild: ett band. I regel finnas i knippet atomer av olika hastighet, motsvarande Maxwells fördelningslag. Ur ekv. (1) kan man lätt härleda, att deviationsbilden för ett inhomogent knippe skulle bli ett band med sin största intensitet, där den odevierade strålen träffar.

Enligt den moderna kvantteorien däremot kan storheten μ_i endast antaga diskreta värden, definierade genom relationen

$$\mu_i = Mg\,\mu_B,$$

där M är det magnetiska kvanttalet, g Landés faktor och μ_B kvantenheten för det magnetiska momentet eller Bohrs magneton.

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_0 c} = 0{,}918 \times 10^{-20} \text{ erg Gauss};$$

e är elektriskt elementarkvantum, h Plancks konstant, m_0 elektronens massa vid liten hastighet och c ljusets hastighet. För atomer av t. ex. silver och kalium är $g = 2$, $M = \pm \frac{1}{2}$, således $Mg = \pm 1$ och $\mu_i = \pm \mu_B$. Vid homogena atomstrålar av silver eller kalium uppdelas i magnetfältet det ursprungliga strålknippet i två, vilka ge upphov till var sin deviationsbild belägen på avståndet $\frac{1}{4}\,\mu_B \frac{l^2}{E} \frac{\partial H}{\partial z}$ från den bild, som erhålles utan fält. Vid inhomogena strålar bredes var och en av dessa bilder ut i ett band. I mitten, där den odevierade bilden legat, uppstår ett intensitetsminimum. Ett deviationsförsök av detta slag skulle kunna avgöra mellan de båda teorierna.

Fig. 7. Uppdelning av kaliumatomstrålar i magnetiskt fält.

Stern och Gerlach visade 1922, att deviationsbilden för silveratomstrålar bekräftar kvantteoriens förutsägelser. Här bifogas ej Stern och Gerlachs resultat, vilka erhållits med rätt outvecklade tekniska hjälpmedel. I stället visas i fig. 7

en senare upptagning för kalium, som enligt kvantteorien skall ge samma bild som silver. Fig. 7 visar tydligt de två band, som kvantteorien förutsagt. Även deviationens storlek överensstämmer med den teoretiskt beräknade. Stern och Gerlachs försök innebär en betydelsefull framgång för kvantteorien. Det har även ställt i utsikt en ny metod att bestämma produkten Mg oberoende av spektroskopiska metoder. För detta ändamål måste man emellertid framställa *homogena* atomstrålar av tillräckligt stor intensitet, vilket problem först lösts 1933 av Rabi och Cohen. Alla tidigare magnetiska undersökningar äro utförda med inhomogena strålar. Inalles äro ett tjugotal atomer undersökta, och mätningarna bekräfta i huvudsak de teoretiska beräkningarna. För väte, alkalimetaller, guld, koppar, silver har man funnit värdet $Mg = \pm 1$, således två band enl. fig. 7. Zink, kadmium, kvicksilver, tenn, bly visa ingen uppdelning, vilket även teorien förutsagt. Vismutatomen bör enligt teorien ge fyra band ($Mg = \pm \frac{1}{2} g, \pm \frac{3}{2} g$). Vid inhomogena strålar lagra sig banden delvis över varandra. Man kan dock ur intensitetsfördelningen beräkna deviationen för de olika banden, och med ledning härav beräkna värdet på Landés konstant, vilket ej förut varit möjligt. Denna beräkning ger värdefulla upplysningar om kopplingen av de kvantvektorer, som härröra från vismutatomens yttre elektroner.

En intressant tillämpning av den magnetiska deviationsmetoden är följande. Ett strålknippe består av atomer och molekyler av vismut. Molekylerna äro diamagnetiska och devieras ej i magnetfält. Atomerna ha däremot ett visst magnetiskt moment. Om ett sådant strålknippe får passera ett Stern-Gerlachfält få vi i deviationsbilden en centralbild, som härrör från de odevierade molekylerna, och på ömse sidor bilder av de devierade atomerna. Med lämplig detektor kan man uppmäta intensitetsfördelningen och beräkna dissociationsgraden i strålknippet. Fig 8 visar två upptagningar av Leu och Fraser vid vismutstrålar. I fig. 8 a är centralbilden synlig, vilket visar närvaron av odis-

socierade vismutmolekyler. Fig. 8 b, som togs vid högre temperatur, anger, att vid denna temperatur äro alla molekyler dissocierade. Lewis har studerat alkalimetallernas dissociation vid olika temperatur hos strålningskällan och beräknat värdet på jämviktskonstanten och dissociationsvärmet vid reaktionen

$$K_2 \rightleftarrows 2K.$$

a $T = 1183°\,\mathrm{K}.$ *b* $T = 1428°\,\mathrm{K}.$

Fig. 8. Molekylär dissociation; magnetiska deviationsbilder av vismutstrålar.

Molekylstrålar ha funnit användning inom spektralanalysen för studium av hyperfinstruktur hos vissa spektrallinier. En spektrallinies bredd ökas till följd av vissa egenskaper hos strålningskällan — vi bortse från den utbredning, som härrör från ofullkomlighet i spektralapparaten. Magnetiska och elektriska fält från närliggande molekyler bidraga till ökad bredd, likaså stötarna mellan molekylerna och den Dopplereffekt, som har sitt ursprung i de strålande molekylernas värmerörelse i riktning mot och från iakttagaren. I ett knippe molekylstrålar förekomma de två först nämnda störningarna i ytterst ringa grad. Utbredningen till följd av Dopplereffekt försvinner, om man observerar vinkelrätt mot strålarnas utbredningsriktning. De spektral-

linier, som utsändas från ett knippe molekylstrålar, äro mycket fina och således lämpliga för studiet av hyperfinstruktur. Bogros har undersökt lithiumlinien 6708 Å. E. med hjälp av molekylstrålar. Föregående undersökningar ha visat, att linien är en dubblett, bestående av en stark komposant och en mycket svag drabant med större våglängd. För uppmätning av våglängdsdifferensen gick Bogros till väga på följande sätt. En ljuskälla utsänder en strålning, som filtreras, så att endast linjen 6708 återstår. Ljuset analyseras med en Lummerplatta (interferensmetod). Från en ugn utsändas lithiumatomstrålar, vilka korsa strålarna från ljuskällan under rät vinkel. Om temperaturen i ugnen är under 400° C, innehåller den strålning, som träffar Lummerplattan, endast ljuskällans spektrallinie 6708. Om ugnens temperatur höjes till c:a 500° C, iakttagas med analysatorn två fina absorptionslinier, som ligga mycket nära varandra. Dessa härröra från lithiums båda isotoper med atomvikterna 6 och 7 (Li_6 och Li_7) och äro huvudkomposanterna till 6708. Upphettas ugnen till ungefär 650° C, uppträder bredvid dessa linier en tredje mycket svag linie, som har större våglängd än de förra. Förklaringen är följande. De båda linierna äro dubbla. Den tredje svaga linien är drabanten till 6708 hos Li_6. Den svagare komposanten till Li_7 synes ej, då den sammanfaller med huvudlinien till Li_6. Våglängdsdifferensen är 0,156 Å. E. På liknande sätt har man funnit, att natriumlinierna D_1 (5896) och D_2 (5890) äro dubbla. Den svagare komposanten ligger på avståndet 0,02 Å. E. åt violett.

Till sist vill jag i korthet nämna några andra områden, där studiet av molekylstrålarna givit oss värdefulla resultat. Mätningar i elektriska fält ha lämnat upplysning om molekylens elektriska egenskaper. Mekanismen hos stöt mellan molekyler och en fast kropp och molekylers kondensation vid en fast kropp har ingående studerats, likaså molekylers spridning och reflexion vid en fast kropp. På dessa områden har man på sista tiden tillämpat L. de Broglies upp-

fattning om materiens vågnatur. Till ett knippe katodstrålar med massan m och hastigheten v kan enligt de Broglie tillordnas ett vågsystem med våglängden

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Existensen av dessa vågor har påvisats av Davisson och Germer vid elektronbombardemang mot en nickelkristall. På liknande sätt skulle till ett knippe molekylstrålar höra ett vågsystem, som för väte vid 0° C skulle ha våglängden $\lambda = 1{,}_2$ Å. E. således samma storleksordning som röntgenstrålarna. Man har också funnit, att molekylstrålar av H, H_2 och He, som reflekteras mot kristallytor av viss orientering, ge upphov till böjningsfenomen på samma sätt som de Broglievågorna vid Davisson och Germers försök med nickelkristallen.

Litteratur.

En utmärkt monografi är Ronald G. J. Fraser, Molecular Rays, Cambridge, 1931.

Undersökningarna vid Sterns laboratorium i Hamburg äro publicerade i Zeitschrift für Physik. De senaste årgångarna av Physical Review innehålla flera uppsatser över molekylstrålar.

I ovanstående uppsats har jag i huvudsak följt Frasers framställning; samtliga figurer i texten äro hämtade ur hans bok.

Jonisationsmätning enligt kondensator-kammaremetoden.

Av ROLF M. SIEVERT.

För undersökningen av sådan strålning, som vid genomgång genom gaser utlöser joner, har man en bekväm och tillförlitlig mätmetod i jonisationsmetoden. I allmänhet användes vid denna metod som bekant en elektrometer, vilkens mätsystem antingen är fast förbundet med eller själv utgör den ena elektroden i ett jonisationskärl. Jonisationskammaren utsättes för strålarnas verkan, och den från den uppladdade elektroden per tidsenhet bortförda elektricitetsmängden utgör ett mått på strålningsintensiteten. Denna mätmetod utvecklades snabbt redan de första åren efter upptäckten av radium- och röntgenstrålarna och har sedan bibehållits i huvudsak oförändrad. För undersökningar inom den medicinska radiologien kom jonisationsmetoden relativt sent i bruk, dels emedan den krävde ett elektrostatiskt mätinstrument, som fordrade fackkunnig skötsel, dels på grund av att det tog tid att konstruera tekniskt tillräckligt fulländade instrument.

Den vanliga jonisationsmetoden har flera nackdelar, speciellt vid användning för medicinska ändamål. Jonisationskammaren är nämligen i de flesta fall sammankopplad med elektrometern, antingen genom en rörlig, mycket ömtålig kabel eller genom ett stelt metallrör. Denna anordning medför ofta stora svårigheter vid applicerandet av kammaren. Dessutom äro störningar i elektrometern, särskilt vid radiumundersökningar, svåra att undvika, och över huvud taget ställer sig denna metod ytterst obekväm för mätningar vid röntgen- eller radiumbehandling av patienter.

För att vid ett visst slag av medicinska röntgenundersökningar, s. k. djupdosmätningar, i någon mån råda bot för dessa brister, konstruerade förf. år 1926 en i princip ny anordning för jonisationsmätningar (fig. 1), vid vilken jonisationskammaren (a), i stället för att förbindas med en elektrometer, försågs med en kondensator (d). Mätningarna tillgingo då så, att kondensatorn, och alltså även innerelektroden (b) i kammaren, uppladdades till en bestämd spänning gentemot jonisationskammarens yttervägg, varefter kammaren bestrålades under en viss, lämpligt vald tid. Genom att sedan placera kondensatorn, med vilken

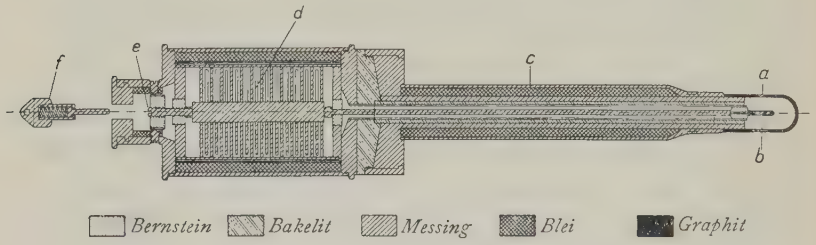


Fig. 1. Kondensatormätinstrument (1926).

kammaren var fast förbunden, på en elektrometer, kunde man bestämma den i kondensatorn återstående elektricitetsmängden. Skillnaden mellan kondensatorns spänning före och efter bestrålningen, dividerad med bestrålningstiden, utgjorde ett relativt mått på strålningsintensiteten.

Apparaten av 1926 kom, på grund av vissa konstruktiva brister, icke till någon större användning men är att betrakta som en övergångsform till de *»kondensatorkammare»*, som under de senaste åren konstruerats vid Radiumhemmets fysiska laboratorium i Stockholm, där denna metod för närvarande i stor utsträckning begagnas för att mäta strålningens intensitet vid röntgen- och radiumbehandling av patienter.

Fig. 2 visar några av de nu använda kondensatorkamrarna, återgivna i naturlig storlek. I typerna *a, b, c* och *d*

har jonisationskammaren utbildats så, att kammarens innerelektrod fått en för ändamålet lämplig kapacitet (0,3—2,0 cm). Metalldelarna äro här av elektronmetall (sp. vikt 1,85; 93 % Mg, 3,1 % Al, 3,3 % Zn, 0,2 % Cu); såsom isolator användes bärnsten. (Om typen *e* se längre fram.) Kamrarna äro nedtill försedda med en förskruvning medelst vilken de efter innerelektrodens uppladdning helt kunna tillslutas.

Mätningarna tillgå på följande sätt. Innerelektroden uppladdas med hjälp av anodbatterier till en spänning (10—700 volt), som ligger högt över den för mättningsström erforderliga, och kammaren exponeras under bestämd tid

Fig. 2. Några kondensatorkammare i naturlig storlek.

($^1/_2$—5 minuter) för den strålning, som skall undersökas. Den efter bestrålningen återstående laddningen mätes genom att kammaren placeras direkt på en elektrometer, vanligen en strängelektrometer, vilken är försedd med en ändamålsenlig kontaktanordning.

Den relativa strålningsintensiteten är proportionell mot antalet pr kbcm och sekund bildade joner, n. Följande relationer gälla:

$$n = \frac{C}{\varepsilon \cdot v \cdot t}(V_1 - V_2) \qquad (1)$$

eller

$$n = \frac{1}{\varepsilon \cdot v \cdot t}(e_1 - e_2) \qquad (2)$$

V_1 och V_2 äro här de före och efter bestrålningen observerade potentialerna, e_1 och e_2 elektricitetsmängderna på

elektroden vid samma tillfällen. C är kapaciteten hos elektrometerns mätsystem + kammarens innerelektrod vid spänningsobservationerna; v är kammarens gasvolym reducerad till 0° och 760 mm Hg, t bestrålningstiden och ε en konstant med värdet $1{,}44 \cdot 10^{-7}$. Formeln (1) tillämpas vid direkt avläsning på elektrometerns skala, formeln (2) när man använder ett kompensationsförfarande, t. ex. så att man å en i elektrometern inbyggd influensring anbringar en kompenserande laddning, som bestämmes med hjälp av voltmeter.

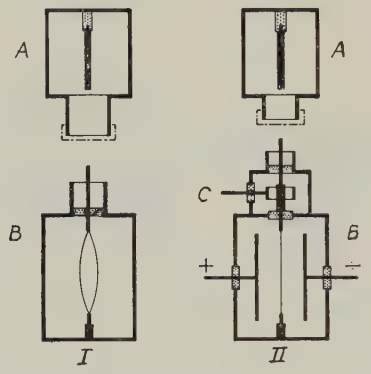


Fig. 3. Schematisk framställning av mätanordning I och II.

Fig. 3 visar schematiskt de båda mot ekvationerna (1) och (2) svarande mätanordningarna I och II. A är kondensatorkammaren, B är elektrometern, i fallet II försedd med en influensring C.

Vid uppladdning av kammaren och vid elektrometerobservationerna användes en särskild, på elektrometern placerad kontaktanordning, vars konstruktion framgår av fig. 4. Kammaren — i figuren av den sfäriska typen fig. 1 a — lägges i en hållare, försedd med en fjäder c. Kammaren är väl centrerad över kontaktstiftet b, mot vilket kammaren vid uppladdning och vid avläsning nedtryckes medelst en liten pincett (ej återgiven i fig.). Stiftet b står nedtill i förbindelse med elektrometerns rörliga system.

Genom intryckning av den på högra sidan befintliga kolven sker uppladdning av kammaren. Vid observation av kammarens spänning åter tjänstgör kolven såsom jordningsanordning för kontrollering av elektrometerns 0-läge före och efter avläsningen. Ledningen till kolven är för omkoppling från »laddning» till »avläsning» förbunden antingen med en omkopplare för fotmanövrering eller med en på elektrometern monterad kvicksilvervippa.

Olika elektrometertyper hava prövats. För avläsning av spänningen, formel (1), har Wulfs 2-trådselektrometer visat

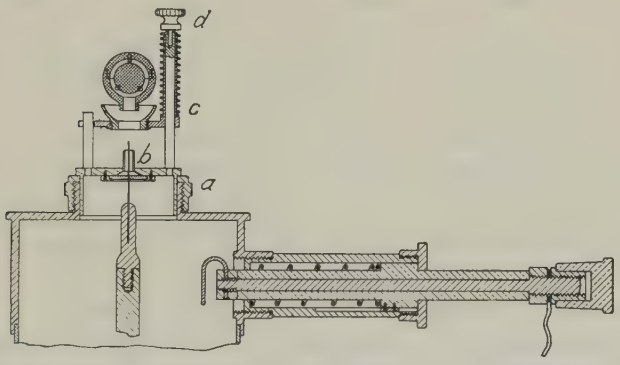


Fig. 4. Kontaktanordning för laddning och mätning av kondensatorkammare.

sig särskilt lämplig, enär denna giver stor noggrannhet, har en nästan rätlinjig volt-skaldelskurva och är mycket stabilt byggd. När stor känslighet önskas, har Lutz-Edelmanns 1-trådselektrometer vid direkt avläsning givit goda resultat. För de noggrannaste kompensationsmätningarna, formel (2), har Wulfs 1-trådsinstrument med speciellt för ändamålet inbyggd influensring givit mycket stor noggrannhet. I en del fall hava observationerna av elektricitetsmängderna e_1 och e_2 kunnat ske med en noggrannhet av intill 0,1 %.

Den här beskrivna metoden torde i de flesta fall hava följande fördelar framför den vanliga jonisationsmetoden:

1) Störningar i den elektrometriska mätanordningen och

i ledningen mellan jonisationskammaren och elektrometern elimineras. Sådana störningar bereda ofta, särskilt vid liten joniserad volym och genomträngande strålning (γ- eller ultrastrålning), avsevärda svårigheter.

2) På grund härav är det möjligt att använda även ytterst små jonisationskammare med en luftvolym ända ned till 1 mm^3 eller mindre, utan att man genom användande av någon tyngre gas eller högt gastryck behöver öka känsligheten.

3) Jonisationskammaren kan förflyttas snart sagt på godtyckligt sätt även under själva bestrålningen. Den kan, om den konstrueras tillräckligt stabilt, vilket i allmänhet utan svårighet låter sig göra, utsättas för accelerationer och starka stötar, utan att några fel uppstå.

4) Såväl kammarens uppladdning som spänningsobservationen efter bestrålningen kan utföras vid praktiskt taget godtycklig tidpunkt, och bestrålningens utförande kan överlämnas till en icke-fackman. I de fall, då kammarens kapacitet är stor i förhållande till luftvolymen och det är fråga om mätning av relativt intensiv strålning, kan tiden mellan kammarens uppladdning och observationen av den efter bestrålningen resterande laddningen utsträckas intill flera månader.

5) Kammaren kan, om så önskas, vid röntgenbestrålning anbringas mycket nära röntgenröret utan någon risk för överslag även vid höga driftspänningar, dels emedan ingen del av kammaren behöver vara jordad, dels emedan densamma kan göras mycket liten.

6) Ett stort antal kammare — om så erfordras av mycket olika typer — kan samtidigt utsättas för bestrålning och därefter mätas på en och samma elektrometeranordning.

7) Vid emanationsmätningar eller vid arbete med radiumpreparat, som kunna tänkas avgiva emanation, kan bestrålningen ske i en annan lokal än den där mätanordningen finnes uppställd, varigenom aktivt belägg på elektrometern undvikes.

8) Om flera arbeten samtidigt skola utföras med starka radiumpreparat som strålningskällor, kunna bestrålningsanordningarna förläggas till relativt långt från varandra belägna platser.

Kondensatorkammaremetoden giver i de flesta fall minst lika stor noggrannhet som den vanliga jonisationsmetoden. Den har prövats för de mest skiftande ändamål, men utrymmet medgiver här endast omnämnandet av en del av de utförda försöken.

Noggranna prov av olika kammarekonstruktioner med luftvolymer från 2 kubikmillimeter till 2 liter hava givit vid handen, att om man sörjer för att kammaren är fukt- och dammfri och om man använder väl rengjorda bärnstensisolatorer, elektricitetsläckaget över dessa även vid de minsta prövade isolatorerna är ytterst obetydligt.

Då den möjligheten förelåg, att isolatorernas tryck mot metalldelarna kunde ge upphov till elektricitetsutveckling (friktionselektricitet), hava laddade kammare av den typ fig. 2 a och b visar, utsatts för stark acceleration — centrifugerats i en ordinär centrifug — utan att någon nämnvärd laddningsminskning kunnat påvisas även vid relativt höga spänningar (3—400 volt) och mycket små isolatorer (minimum: diameter 0,7 mm, fri längd 0,5 mm).

Inom den medicinska radiologien [1] har metoden i stor utsträckning använts för mätningar av såväl röntgenstrålar som β- och γ-strålar. Mätningar på patienter utföras på så sätt, att lämpliga kammare i laddat skick översändas till behandlingsavdelningen, där vederbörande läkare själva eller i samråd med en fysiker anbringa kamrarna på patienten.

Av de i fig. 2 avbildade kammartyperna användas kulformiga för mätningar på huden, i munhålan och i övriga kroppskaviteter, isynnerhet vid teleradiumbehandling (se sid. 12). Av dessa kammare begagnas i det löpande arbetet vid Radiumhemmets fysiska laboratorium c:a 150 st.,

[1] Jmf. tillägg i slutet av uppsatsen.

fördelade på 4 olika typer. Mätningar vid teleradiumbehandling hava även utförts »per post» i ett flertal länder såsom Norge, Tyskland, Frankrike och Amerika. Något 10-tal kammare laddas i Stockholm, sändas till vederbörande utländska sjukhus, där de bestrålas och returneras, så att man här efter observation av de återstående laddningarna, är i stånd att konstatera, vilken dosering som använts vid sjukhuset i fråga. Tiden mellan laddning och avläsning har i vissa fall uppgått till $1\,^1/_2$ månad, varvid försöksfelet i allmänhet ej överstigit 2—3 %.

Vid intubation med radiumnålar (se sid. 12) är det av intresse att åtminstone approximativt känna till strålningsfördelningen mellan nålarna. Man använder då små cylindriska kammare, vilka instickas i vävnaden mellan radiumnålarna. Den å fig. 2 d avbildade typen är avsedd för detta ändamål. Nyligen har en annan typ av nålkammare konstruerats, vid vilken luftvolymen nedbringats till mindre än 2 mm^3.

Under det senaste året har en ny kammartyp, avsedd speciellt för mätningar vid röntgenterapi, utexperimenterats. Den består av en cylinderkondensator, försedd med en liten jonisationskammare, vars väggar och centralelektrod äro klädda med kol. (Se fig. 2 e). Kolklädseln är nödvändig för att kammaren vid bestrålning med röntgenstrålar av olika våglängd skall giva resultat som äro approximativt proportionella mot dem, som man erhåller med en joniseringskammare, där sekundärstrålning från väggarna uteslutits.[1] Dielektriket är här bärnsten, varför kapaciteten blir relativt stor (5—10 cm) i förhållande till den joniserade volymen, vilket är önskvärt, då strålningsintensiteten vid röntgenbehandling är betydligt större än vid radiumbehandling. Med denna kammartyp hava mätningar

[1] Detta sker genom att använda en stor kammare och avblända strålknippet så att sekundärstrålarna från den joniserade luftvolymen utnyttjas men sekundärstrålning från kammarens väggar ej kan bidraga till jonisationsströmmen.

på något hundratal patienter hittills utförts. Det gäller dels att kontrollera, att den önskade bestrålningskvantiteten verkligen erhålles i olika punkter av huden vid infallsfältet, dels att mäta strålningen i kroppen, t. ex. vid behandling av underlivskräfta, samt slutligen även att konstatera den strålningsmängd, som går igenom kroppsdelen i fråga. Detta senare är av stor vikt, då behandlingar givas på ett flertal fält, och man alltså måste summera alla strålningsbidragen för att få en uppfattning om totaldosens storlek.

För utrönande av den strålningsmängd, som läkare och personal erhålla i radiologiskt arbete, pågår en omfattande undersökning. Vederbörande får i sitt arbete under en tid av 1—4 dagar bära ett flertal kammare (Fig. 2 a och b) fördelade över olika delar av kroppen och därefter insända dem till laboratoriet. Finner man någon punkt, där strålningen varit så stor, att risk för skada kan tänkas föreligga, undersökas förhållandena närmare.

En undersökning av γ-strålarnas absorption i relativt tunna metallskikt har utförts med hjälp av kondensatorkammaremetoden. Det vanligaste tillvägagångssättet vid absorptionsmätningar är ju, att man söker utesluta sekundärstrålning genom att strålningskällan avskärmas med starkt absorberande material, t. ex. bly eller kvicksilver. Då emellertid decimetertjocka skydd erfordras för att effektivt avskärma γ-strålning, är det mycket svårt att förhindra, att de som bländare verkande delarna av skärmarna giva en icke önskvärd sekundärstrålning. Genom att använda kondensatorkammare av endast några få cm^3:s volym kan man undersöka γ-strålarnas absorption enligt en helt annan princip, nämligen att över huvud taget undvika massor, som kunna sekundärstråla. Hela apparaturen består då av ett relativt tunnväggigt radiumpreparat på c:a 50 mg Ra-element, en jonisationskammare på 15 eller 20 cm avstånd därifrån samt mellan dessa provet (runda skivor av 1,5 cm diam.), vars absorption skall mätas. Hållare och stativ äro av så tunt material som möjligt. Man har då

endast att räkna med sekundärstrålning från det absorberande materialet. Förhållandet mellan sekundärstrålkvantiteterna vid de båda avstånden är även i någon mån beroende på sekundärstrålningens vinkelfördelning (Comptoneffekten), varför man vid beräkningen måste taga hänsyn till denna. Undersökningar visa emellertid, att denna vid här angivna proportioner på försöksanordningarna är så liten, att den nätt och jämnt kan påvisas. På detta sätt hava absorptionskoefficienterna för bly, silver, tenn, mässing och aluminium bestämts för materialtjocklekar liggande mellan 1 och 8 mm.

Kondensatorkammaremetoden kan även med fördel användas för undersökning av jonisationens beroende av gastrycket. Man har visat, att de per volymsenhet i en gas bildade jonerna, när det gäller genomträngande strålning (γ- och ultrastrålning) ej stå i direkt proportion till gastrycket, utan att jonisationen vid tryck av storleksordningen 100 –150 atm. närmar sig ett maximum. Dessa förhållanden hava undersökts med kondensatorkammare såväl för röntgen- som γ-strålning med hjälp av kulformiga kammare av ungefär den typ, som fig. 2 a visar (material: mässing och tenn). Kammaren laddas vid vanligt lufttryck och inlägges därefter i en tryckbehållare, där trycket ökas till önskad storlek (intill 170 atm.). Tryckbehållaren bestrålas, och efter långsam sänkning av trycket uttages kammaren, och den återstående laddningen bestämmes. Dylika försök vid olika tryck och med olika gaser hava visat, att vid röntgenstrålning ett maximum av jonisation uppnås vid 40 –100 atm., och att jonisationen sjunker vid ytterligare höjning av trycket. De använda laddningsspänningarna voro mycket höga, ända upp till 4 à 5000 volt per cm, varför bristande mättningsström i vanlig bemärkelse knappast kan anses föreligga. Under senare år har bl. a. COMPTON teoretiskt behandlat jonisationens tryckberoende. Man kan säga, att de sekundära β-strålarna, vilka uppstå i gasen och i jonisationskammarens väggar, i den komprimerade gasen,

vad jonisationstätheten beträffar, förhålla sig liksom α-strålarna i luft vid atmosfärtryck. Som bekant får man med α-strålar ej ens vid atmosfärtryck proportionalitet mellan tryck och jonisation, då avståndet mellan de utmed partikelns bana framkallade jonerna är mycket ringa och rekombinationssannolikheten därför blir mycket stor.

För undersökning av ultrastrålning och den hårda, svaga γ-strålning, som utsändes från överallt i jordskorpan befintliga radioaktiva ämnen, medför kondensatorkammaremetoden nya möjligheter. Kammare, bestående av $^1/_2$—4 liters stålflaskor av den typ, som användes för komprimerade gaser och i vilka en bärnstensisolerad stav monterats, utgöra ett enkelt och känsligt instrument. Elektroden laddas, bomben fylles med en lämplig gas till t. ex. 100 atm. tryck och placeras därefter på den plats, där strålningen skall mätas. Efter exponeringstidens slut (flera timmar—dagar) utsläppes gasen med måttlig hastighet (1—3 min.) och spänningsmätning sker. För undersökningar i stor skala användas även mindre kammare (25—100 cm^3) utan övertryck, vilkas optimala exponeringstider vid en jonisation av 5—25 joner per cm^3 och sek. ligga mellan 3 och 30 dagar. Därvid uppnås en noggrannhet på c:a $\pm$ $^1/_4$ jon, alltså 5—1 %. Dessa kammare äro trots att spänningsobservationerna ske på 0.05—0.1 volt när, särdeles okänsliga för stötar. Så hava t. ex. vid fall från 1—3 m höjd mot hårda ytor såsom sten- eller trägolv, inga spänningsförändringar kunnat observeras.

Såsom framgår av ovanstående är kondensatorkammaremetoden särskilt lämplig vid stora mätserier och i sådana fall, där ömtåliga instrument utgöra ett hinder för uppnående av tillförlitliga resultat. Kanske man därför kan hysa förhoppningar om att denna variation av den äldre jonisationsmetoden skall bliva av betydelse för den vetenskapliga forskningen.

Här må till slut lämnas några upplysningar beträffande Radiumhemmets behandlingsteknik.

Röntgenbehandling sker i regel på 30—60 cm avstånd från rörets focus, varvid patienten skyddas mot ej önskvärd bestrålning, dels genom en skyddskåpa kring röret, dels genom att den del av kroppen, som skall bestrålas, avgränsas på så sätt att omkringliggande partier täckas med blygummi. Man skiljer på ytbehandling (100—120 kV, 1—2 mm Al-filtrum), där strålningsverkan önskas endast på någon cm:s djup under hudytan, och djupbehandling (150—175 kV, 4 mm Al, 0,5 mm Cu + 1 mm Al eller tennfiltrum[1]), där man, genom att bestråla från ett flertal olika fält, söker uppnå en stark bestrålning på 5—15 cm djup.

De vanligaste formerna för *radiumbehandling* äro:

Intubation med nålar på 3—10 mg Ra-element (10—15 mm längd, 2—3 mm diameter, vägg av c:a 0,5 mm Pt), vilka instickas i själva tumören.

Ytapplikation, varvid radiumtuber (10—40 mm längd, 3—4 mm diameter, vägg av c:a 0,35 mm Au + 0,30 mm Pt) placeras i en plastisk massa på 2—5 mm avstånd från den yta (hud eller slemhinna), under vilken tumören är belägen på 0—2 cm djup. Detta slag av behandling har numera till stor del ersatts med intubation med nålar samt teleradiumbehandling. Till ytapplikation kan även räknas radiumbehandling av underlivskräfta, varvid radiumpreparatet inlägges i uterus eller vagina.

Vid bägge dessa behandlingsmetoder är den på en patient anbringade totala radiumkvantiteten av storleken 10—200 mg, och behandlingstiden varierar i allmänhet mellan 3 och 24 timmar.

Teleradiumbehandling. 1—3 gr Ra-element äro placerade i en »kanon» (blycylinder), vars mynning riktas mot den del, som skall behandlas. Radiumpreparaten befinna sig på 3—6 cm avstånd från huden, varför strålningsfördelningen under huden blir mera likformig än vid de övriga radiumbehandlingsmetoderna. Denna behandling är därför användbar även vid relativt djupt liggande tumörer. Den uppdelas på 1—2 timmars bestrålningar, och den sammanlagda tiden är i regel 10—40 timmar. Teleradiumbehandling fordrar visserligen stora radiummängder och är därför synnerligen kostsam men giver i flera fall bättre resultat än någon annan behandling.

Litteratur: Rolf M. Sievert, *Eine Methode zur Messung von Röntgen-, Radium- und Utrastrahlung nebst einige Untersuchungen über die Anwendbarkeit derselben in der Physik und der Medizin.* Acta Radiologica. Suppl. XIV. Stockholm 1932, 179 sid. + VIII.

[1] Jmf. Thoræus' i denna tidskrifts innevarande årg. sid. 57 refererade avhandling.

Om stjärnornas strålning.

Några tillämpningar av de termodynamiska strålningslagarna på astronomiska problem.

Av ÅKE WALLENQUIST.

I tvenne uppsatser i denna tidskrift, »Temperaturstrålingens energifördelning. En översikt över de teoretiske synspunkter»,[1] har OLAV DEVIK på ett instruktivt sätt behandlat de termodynamiska lagarna för den svarta kroppens strålning. I anslutning till denna framställning vill jag här giva några tillämpningar av dessa lagar på astrofysikaliska problem.

1. *Allmänna definitioner.*

Beteckna vi med $J(\lambda)$ den verkliga intensiteten hos stjärnstrålningen för ljus av våglängden λ, och om $p(\lambda)$ och $\varphi(\lambda)$ äro funktioner, angivande den bråkdel av den infallande strålningen, som genomsläppes av atmosfären resp. registreras av det använda instrumentet, blir den observerade strålningsintensiteten inom området $\lambda \ldots \lambda + d\lambda$

$$l(\lambda)\,d\lambda = J(\lambda) \cdot p(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (1)$$

Den totala intensiteten, l, hos stjärnstrålningen erhålles genom en integration över alla våglängdsområden:

$$l = \int_0^\infty J(\lambda) \cdot p(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (2)$$

I stället för stjärnornas ljusstyrkor brukar man inom astronomien angiva deras storleksklasser eller magnituder. Rela-

[1] Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi, Årg. 15, sid. 89 och 148 (1932).

tionen mellan ljusstyrka och magnitud erhålles lätt genom följande betraktelse. Om l_m och l_n beteckna de apparenta ljusstyrkorna för tvenne stjärnor av magnituderna m och n respektive, gäller definitionsmässigt relationen

$$\frac{l_n}{l_m} = a^{m-n}, \tag{3}$$

där a är en konstant. Inom astronomien är stjärnornas magnitudskala empiriskt fastlagd så, att $\log a = 0{,}100$ och således $a = 2{,}512$.[1]

Kallas en stjärnas ljusstyrka av magnituden 0 för l_0, giver relationen (3):

$$\log \frac{l_m}{l_0} = -0{,}4\ \mathrm{m}, \tag{4}$$

eller

$$m = 2{,}5\,(\log l_0 - \log l_m). \tag{5}$$

Den sista ekvationen ger således relationen mellan stjärnans apparenta magnitud och ljusstyrka.

Med en stjärnas absoluta magnitud (M) menas den skenbara magnitud, som stjärnan skulle ha, om den förflyttades till ett avstånd = 10 parsec[2] från oss. Befinner sig en stjärna med apparenta magnituden m och ljusstyrkan l (index m utelämnas) på ett avstånd av r parsec från oss, kan dess absoluta magnitud M och ljusstyrka L lätt härledas genom att tillämpa lagen för ljusstyrkans avtagande med kvadraten på avståndet. Vi erhålla således omedelbart

$$\frac{l}{L} = \frac{100}{r^2}. \tag{6}$$

Vidare är enligt ekv. (5)

$$m = 2{,}5 \log \frac{l_0}{l} \text{ och } M = 2{,}5 \log \frac{l_0}{L}. \tag{7}$$

[1] I spektralfotometrien räknar man alltid med 10-logaritmer.

[2] En parsec = avståndet till en stjärna, vars parallax (d. v. s. den vinkel, varunder jordbanans radie synes från stjärnan) är 1″.

Ur ekvationerna (6) och (7) erhålles slutligen relationen mellan en stjärnas absoluta magnitud å ena sidan och dess apparenta magnitud och avstånd, uttryckt i parsec, å andra sidan

$$M = m + 5 - 5 \log r. \quad (8\,a)$$

Betecknas parallaxen med π, erhålles $\pi = \frac{1}{r}$ bågsekunder, och man erhåller det analoga uttrycket

$$M = m + 5 + 5 \log \pi. \quad (8\,b)$$

Vi återgå nu till ekv. (2). Med tillhjälp av ekv. (5) kan denna lätt transformeras till storleksklass, och vi erhålla som det generella uttrycket för en stjärnas magnitud

$$m = -2{,}5 \log K \int_0^\infty J(\lambda) \cdot p(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad (9)$$

där K är en konstant $\left(= \frac{1}{l_0}\right)$. Alltefter instrumentets känslighetsfunktion erhålla vi således olika slags magnituder för samma stjärna. Kallas ögats känslighetsfunktion för $\varphi_v(\lambda)$ och den fotografiska plåtens känslighetsfunktion $\varphi_p(\lambda)$, giver oss ekv. (9) det teoretiska uttrycket för en stjärnas visuella respektive fotografiska magnitud. Differensen mellan stjärnans fotografiska (m_p) och visuella magnitud (m_v) kallas färgindex, (C_{pv}), vilket är ett mått på stjärnfärgen. Enligt denna definition ger oss ekv. (9) följande uttryck för en stjärnas färgindex [1]

$$C_{pv} = m_p - m_v = -2{,}5 \log \left\{ \frac{K_1 \int_0^\infty J(\lambda) p(\lambda) \varphi_p(\lambda)\, d\lambda}{K_2 \int_0^\infty J(\lambda) p(\lambda) \varphi_v(\lambda)\, d\lambda} \right\}. \quad (10)$$

Strålar stjärnans som en svart kropp, erhålles slutligen

[1] Jmfr Åke Wallenquist, Fotometriska undersökningar av öppna och klotformiga stjärnhopar. Populär astron. tidskr. 1928, sid. 17—38.

enligt Plancks lag [1]

$$J(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}, \qquad (11)$$

där c_1 är en konstant och c_2 har värdet 1,435, om λ är uttryckt i cm.

2. *Det astrofysikaliska temperaturproblemet.*

Stjärntemperaturen i dess vidsträcktaste bemärkelse är ett synnerligen svävande begrepp. De teoretiska undersökningarna av stjärnornas inre byggnad visa nämligen, att temperaturen hos en stjärna ej är en konstant kvantitet, utan att den varierar från skikt till skikt inom stjärnan så, att den avtager från centrum utåt enligt strålningsjämviktens lagar. Vad vi närmast mena med stjärntemperaturen är därför temperaturen hos det skikt av stjärnan, från vilket den av oss observerade strålningen huvudsakligast härstammar, d. v. s. från stjärnfotosfären. Stjärntemperaturen är ej en kvantitet, som direkt kan mätas, utan den måste härledas ur stjärnans strålningsegenskaper.

Energifördelningen inom stjärnans kontinuerliga spektrum, kombinerad med teorien för den svarta kroppens strålning, leder till den s. k. »effektiva temperaturen», varmed förstås temperaturen hos en hypotetisk svart kropp av samma dimensioner som stjärnan och vars spektrala energifördelning överensstämmer med stjärnans. Den verkliga stjärntemperaturen, d. v. s. den temperatur, som är karakteristisk för det strålande skiktet, kan ej vara lägre än den effektiva temperaturen.

Teoretiskt kunna vi således bestämma stjärntemperaturen genom att komparera den absoluta energi, som per sekund utstrålar från stjärnans ytenhet, med den svarta kroppens. Allteftersom vi betrakta energien för en bestämd våglängd eller för ett mer eller mindre utbrett spektralområde erhålla

[1] Jmfr t. ex. O. Devik, denna tidskr. årg. *15* sid. 149.

vi därvid den »svarta temperaturen» respektive »strålningstemperaturen». Endast för det fall, att stjärnan strålar som en ideal svart kropp, äro strålningstemperaturen och den svarta temperaturen identiska och lika med stjärnans effektiva temperatur. Den svarta temperaturen och strålningstemperaturen för en stjärna kunna i allmänhet ej direkt bestämmas, enär vi, för härledning av den absoluta strålningsintensiteten även måste känna stjärnans skenbara radie, vilken endast i enstaka fall kunnat bestämmas medelst interferometermätningar.

I praktiken måste vi därför i de flesta fall nöja oss med att studera den *relativa* intensitetsfördelningen inom det kontinuerliga stjärnspektret, fritt från störande absorptionsområden, och komparera den sålunda erhållna energikurvan med Plancks lag. Erfarenheten från dylika spektralfotometriska undersökningar ha visat, att de temperaturvärden, som erhållas för olika spektralområden hos samma stjärna, i regel ej överensstämma. Detta förhållande beror i själva verket på, att *stjärnornas strålning endast i en första approximation kan anses vara svart strålning.* Speciellt inom stjärnspektrums violetta och ultravioletta områden gör sig en depression av stjärnans observerade energikurva i förhållande till den svarta kroppens gällande. Inom det visuella spektralområdet är depressionen ej så markant, varför lagen för svart strålning inom detta område är med stor tillnärmelse riktig.[1]

Den här berörda omständigheten har lett till en ny temperaturdefinition. De spektralfotometriska undersökningarna leda i själva verket ej till bestämning av »effektiva stjärntemperaturer» utan till »spektralfotometriska färgtemperaturer». Ha undersökningarna gått ut på att bestämma totalintensiteten inom mer eller mindre utbredda spektralområden, som fallet är t. ex. vid färgindexbestämningarna, erhålla vi på analogt sätt ej »effektiva tempera-

[1] Jmfr Bertil Lindblad, Om bestämning av stjärnornas yttemperatur. Populär astronomisk tidskr., årg. 1925, sid. 13—24.

turer» utan »färgtemperaturer». Äro undersökningarna åter inskränkta till mycket trånga spektralområden, kunna vi i gränsfallet tillordna varje våglängd en specifik färgtemperatur och komma då fram till begreppet »gradationstemperatur». Stjärnstrålningens avvikelse från Plancks lag avspeglas tydligast i gradationstemperaturens variation med våglängden inom ett stjärnspektrum.

Endast vid ideal svart strålning äro de olika färg- och gradationstemperaturerna för samma stjärna identiska och lika med den effektiva temperaturen.

3. *Stjärnorna som svarta kroppar.*

Vi ha av det föregående sett, att stjärnorna ej strängt följa den svarta kroppens strålningslagar. Vid flera astrofysikaliska problem har det emellertid visat sig vara synnerligen fruktbringande att som en första arbetshypotes utgå från, att stjärnstrålningen följer Plancks lag, vilket inom det visuella spektralområdet med stor tillnärmelse är riktigt. I det följande utgå vi därför från antagandet, att stjärnorna stråla som svarta kroppar.

Plancks lag, ekv. (11), ger oss då ett uttryck för stjärnans ytljusstyrka, d. v. s. den energi, som per sekund utstrålar från varje cm^2 av en stjärnas yta av temperaturen T, för våglängden λ.

Om stjärnans radie är R, blir den totala ljusmängden av våglängden λ, som emanerar från stjärnan:

$$L_\lambda = 4\pi R^2 \cdot \frac{c_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}. \qquad (12)$$

Transformeras detta uttryck till magnitud enl. ekv. (5) och sättes

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 = e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \right), \qquad (13)$$

erhålles efter förenkling relationen

$$M_\lambda = c_\lambda - 5 \log R + \frac{1{,}560}{\lambda T} + x, \qquad (14)$$

där c_λ är en konstant, som beror på λ, och x en liten kvantitet, som i de flesta fall kan försummas:

$$\left.\begin{aligned} c_\lambda &= 2{,}5 \log \frac{L_0 \lambda^5}{4\pi c_1} \\ x &= 2{,}5 \log\left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Ekv. (14) är således ett uttryck för en stjärnas absoluta magnitud i monokromatiskt ljus av våglängden λ. BRILL har visat, att man kan ersätta totalstrålningen hos den visuella eller fotografiska magnituden med den monokromatiska strålningen för en bestämd våglängd, den s. k. »isofota våglängden», varmed förstås den våglängd för vilken energikurvans spektrala intensitet är lika med den ifrågavarande magnituden sånär som på en konstant faktor. BRILL har beräknat de isofota våglängderna för de visuella och fotografiska magnituderna i Harvardskalan[1] till $5.29 \cdot 10^{-5}$ cm och $4.25 \cdot 10^{-5}$ cm resp.

Insättas dessa värden för λ i ekv. (14), erhållas följande uttryck för en stjärnas visuella respektive fotografiska magnituder:

$$\left.\begin{aligned} M_v &= c_v - 5 \log R + \frac{29\,500}{T} + x_v \\ M_p &= c_p - 5 \log R + \frac{36\,700}{T} + x_p \end{aligned}\right\}. \qquad (16)$$

Konstanterna kunna bestämmas ur solens egenskaper. Sättes för solen: $R = 1$, $T = 6\,000°$, $M_v = 4{,}83$ och $M_p = 5{,}40$,

[1] För att erhålla en fast utgångspunkt vid bestämning av stjärnmagnituder har man vid Harvard-observatoriet fastställt den fotografiska och visuella magnituden för ett stort antal stjärnor inom utvalda standardområden, fördelade över hela himlen.

erhållas följande approximativa uttryck för M_v och M_p, där den lilla kvantiteten x negligerats.

$$\left.\begin{aligned} M_v &= \frac{29\,500}{T} - 5 \log R - 0{,}08 \\ M_p &= \frac{36\,700}{T} - 5 \log R - 0{,}72 \end{aligned}\right\} . \tag{17}$$

Subtraheras den första från den sista ekv. (17), erhålles som uttryck för färgindexet

$$C_{pv} = M_p - M_v = \frac{7\,200}{T} - 0{,}64 , \tag{18}$$

varur

$$T = \frac{7\,200}{C_{pv} + 0{,}64} . \tag{19}$$

Är stjärnans färgindex bekant, erhålles temperaturen ur ekv. (19). Införes den sålunda erhållna temperaturen i en av ekv. (17), t. ex. den första, erhålles följande relation, vilken ger stjärnans radie, uttryckt i solens som enhet;

$$\log R = 0{,}82\, C_{pv} - 0{,}20\, M_v + 0{,}51 . \tag{20}$$

Ur stjärnans absoluta magnitud och färgindex kan således dess strålningsteoretiska radie beräknas. Är stjärnans absoluta magnitud obekant, kunna vi lätt härleda ett analogt uttryck för stjärnans apparenta diameter (d''), uttryckt i bågsekunder. Enär solens diameter är $\frac{1}{107}$ av jordbanans radie, erhålles

$$d'' = \frac{1}{107}\, \pi \cdot R , \tag{21}$$

där π = stjärnans parallax.

Med tillhjälp av denna ekvation, ekv. (8 b) och ekv. (20) erhålles följande uttryck för stjärnans apparenta diameter:

$$\log d'' = 0{,}82\, C_{pv} - 0{,}20\, m_v - 2{,}52 . \tag{22}$$

Äro kvantiteterna M_v och C_{pv} kända för en stjärna, kunna vi härleda stjärnans absoluta »bolometriska» magnitud, vilken är ett mått på stjärnans utomterrestiska totalstrålning. (Hur den s. k. »bolometriska korrektionen» beräknas, förbigår jag här. I de gängse tabellerna för att beräkna denna korrektion, är nollpunkten lagd så, att korrektionen försvinner för stjärnor av samma effektiva temperatur som solen.) Äro en stjärnas absoluta bolometriska magnitud och temperatur kända, kunna vi med tillhjälp av Stefan-Boltzmanns lag, enligt vilken totalstrålningen från ytenheten av en svart kropp är proportionell mot fjärde potensen av absoluta temperaturen, även komma fram till ett uttryck för stjärnans diameter.

Betecknas stjärnans totalstrålning med L, radie med R och effektiva temperatur med T, samt de motsvarande kvantiteterna för solen med $L_\odot$, $R_\odot$ och $T_\odot$ respektive, giver Stefan-Boltzmanns lag:

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{R^2 T^4}{R^2_\odot T^4_\odot}. \qquad (23)$$

Sättes som förut $R_\odot = 1, T_\odot = 6\,000°$ samt $M_{bol\odot} = 4{,}83$, erhålles lätt följande uttryck för beräkning av stjärnans radie i solens som enhet:

$$\log R = -0{,}2\, M_{bol} - 2 \log T + 8{,}53. \qquad (24)$$

Slutligen vill jag till jämförelse giva de medelst interferometer uppmätta apparenta stjärndiametrarna och de strålningsteoretiskt enl. ekv. (22) beräknade för några ljusstarka stjärnor.

Stjärna	Apparent diameter	
	Observerad	Beräknad
Arcturus (α Bootis)	0″,020	0″,023
Aldebaran (α Tauri)	,020	,034
Betelgeuse (α Orionis)	,047	,048
Antares (α Scorpii)	,040	,042
Scheat (β Pegasi)	,021	,025

Bosscha Sterrenwacht Lembang (Java) Dec. 1932.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

8. Förtydliganden.

Läroboksförfattare, som med anledning av 1928 års kursplan upptagit sannolikhetsräkning, grunda framställningen på det aprioriska sannolikhetsbegreppet, ehuru detta så gott som uteslutande är tillämpligt på hasardspelens massfenomen. Denna omständighet föranledde mig att erinra om tillvaron av begreppet sannolikhet a posteriori. Lektor PETRINI anslöt sig i en uppsats i denna tidskrift (årg. 14, sid. 77) till den äldre teorin. På grund härav utökade jag min av sex uppsatser bestående framställning med en sjunde, som huvudsakligen utgör en granskning av den av lektor PETRINI för de allmänna läroverken föreslagna kursen i sannolikhetsräkning. Att döma av lektor PETRINIS uppsats *Om sannolikhetsräkning i skolan* i föregående häfte av denna tidskrift synes min framställning vara i behov av vissa förtydliganden huvudsakligen å följande fyra punkter, nämligen 1) sannolikhetsbegreppet, 2) de stora talens lag, 3) GAUSS' fördelningsfunktion och 4) s. k. paradoxala problem.

Sannolikhetsbegreppet. Sannolikheten *a priori* definieras som förhållandet mellan antalet gynnsamma fall och antalet lika möjliga fall. Teorin, som leder sitt upphov från problem rörande hasardspel, har rönt det starkaste inflytande av JACOB BERNOULLI, LAPLACE och POISSON. I senare tid ha fullständiga framställningar av den aprioriska sannolikhetskalkylen med tillämpningar lämnats av E. CZUBER och E. BOREL. Den sistnämndes Traité du cal-

cul des probabilités et de ses applications räknar en hel stab av medarbetare och är ännu icke fullbordad.

Definition av begreppet *lika möjliga fall* har trotsat filosofernas ansträngningar. Man åberopar, utan att vinna allmänt godtagande, än den felande grundens princip än den tvingande grundens princip. Likamöjlighetsdefinitionen har av kritiken befunnits ologisk, därför att den företer en cirkelgång, då uttrycket lika möjliga fall är synonymt med uttrycket lika sannolika fall. Czuber anbefaller som utgångspunkt *absolut okunnighet* om förhållandena. Detta uttryck torde vara ekvivalent med vad lektor Petrini menar med det subjektiva sannolikhetsbegreppet, även kallat indifferensprincipen. Sannolikheten $^1/_6$ tillkommer därför var och en av tärningens sidor enligt lektor Petrini, även om tärningen är falsk. För min del har jag uttalat (årg. 15, sid. 3) att likamöjlighetsdefinitionen icke kan tillämpas på en falsk tärning. Man är tvungen att använda frekvensdefinitionen. Av sammanhanget framgår, att jag närmast tänkt på det fall, att man vet att den är falsk. En av de tidigare anförda författarna (Kamke) redogör för en försöksserie om 600 kast med en tärning, i vilken fanns infogad en bit bly nära ettan. Av de 600 kasten voro 45 (7 %) ettor, 98 (16 %) treor och 183 (30 %) sexor. Av en tabell angivande resultatet efter 20, 40, 60, . . . 600 kast framgår, att de relativa frekvenstalen närma sig de ovan angivna. Vilka äro här de lika möjliga fallen? Man kan följaktligen icke utan vidare antaga, att en tärnings tyngdpunkt sammanfaller med dess mittpunkt. Beträffande de sex sidorna av en tärning, om vilken man ingenting vet, kan man hysa en *förmodan* att de äro lika möjliga, men denna förmodan kan likaväl vara falsk som riktig. Det egendomliga med subjektivisterna är att tankegången: »Jag anser fallen vara lika sannolika» blir ersatt med »fallen äro lika sannolika» — emedan sannolikheten enligt deras förmenande endast är något subjektivt. Den världsberömde nationalekonomen J. M. Keynes har i ett

arbete av filosofisk-matematisk karaktär [1] mycket riktigt anmärkt, att av indifferensprincipen följer, att varje uttalande rörande sannolikheten av något, över vars beskaffenhet man ingenting vet, är $^1/_2$, ty det bildar med sin egen kontradiktoriska motsats två lika möjliga fall. Vet man intet i fråga om färgen på en sak, är sannolikheten för att den är blå $^1/_2$, likaså för att den är gul $^1/_2$, sannolikheten för att den är grön $^1/_2$ etc., så att sannolikhetssumman kan bli hur stor som helst. För en vanlig människa synes det vara självklart, att om man ingenting vet om en sak, kan man ej heller göra något uttalande över dess sannolikhet. Lektor Petrini säger, att min »bristande förståelse för sannolikhetsbegreppets införande i skolan torde bottna i den totala frånvaron av all tanke på åtskillnaden mellan subjektiv och objektiv sannolikhet». Redan huvudrubriken på min uppsatsserie ger vid handen, att jag tagit avstånd från det subjektiva sannolikhetsbegreppet.

Den aprioriska sannolikhetskalkylen rör sig enligt v. Mises med en säregen logik. Under det att man i andra vetenskaper drager slutsatser av vad man vet, anser man att ifråga om sannolikhetsräkning de värdefullaste slutsatser kunna vinnas av det, varom man är absolut okunnig.

Efter en del famlande försök i mitten av 1800-talet av Cournot, Leslie Ellis och John Venn har så småningom uppstått ett *aposterioriskt* sannolikhetsbegrepp. Teorin med tillämpningar har i våra dagar fullständigt utformats av R. von Mises. Den sannolikhet, varom här är fråga, kallas även statistisk eller empirisk och definieras på sätt som i det föregående närmare angivits, som limes för ett frekvenstal (årg. 15, sid. 6 f.).

Den, som för praktiskt bruk behöver någon kännedom om sannolikhetsräkning, har föga gagn av att lägga ned möda på inhämtandet av det aprioriska sannolikhetsbe-

[1] A treatise on probability, London, 1921, XII + 416 s., även i tysk översättning av F. M. Urban, under titeln Über Wahrscheinlichkeit, Leipzig, 1926.

greppet. Han behöver stödja sig på erfarenheten, d. v. s. på ett aposterioriskt (statistiskt) sannolikhetsbegrepp. Den aprioriska sannolikhetsteorin må förbehållas den rena matematiken. Enligt min ringa erfarenhet är detta område betydligt svårare än vad det kan förefalla vid ett studium av de första elementen.

De stora talens lag. I det föregående (årg. 15, sid. 5) har erinrats om den förvirring som rått angående de stora talens lag. I 4:e kapitlet av sitt berömda arbete angående vittnesmåls sannolikhet bevisade Poisson de stora talens lag (det s. k. poissonska teoremet) med utgångspunkt från det klassiska likamöjlighetsantagandet. Åtskilliga förmenade, att ur detta teorem följde som korollarium en annan sats, som i inledningen till hans nyssnämnda arbete också benämnes de stora talens lag. Denna innebär, att den relativa frekvensen av en tilldragelse närmar sig ett visst gränsvärde vid fortsatt upprepande av försöket. Det är förmodligen detta betraktelsesätt, som föranlett lektor Petrinis uttalande att de stora talens lag är sannolikhetskalkylens kärna. I själva verket har sannolikhetsbegreppet olika innebörd i de två satser, som var för sig av Poisson benämnas de stora talens lag.

Såsom tidigare omnämnts, använda anhängarna av det empiriska (aposterioriska) sannolikhetsbegreppet ett alldeles motsatt betraktelsesätt. Man antager existensen av det poissonska gränsvärdet vid ett fortsatt upprepande av ett försök vara ett postulat, på vilket man bygger definitionen på sannolikhet (se årg. 15, sid. 6 f.). Som ett annat postulat förutsättes omöjligheten av ett spelsystem (regellöshetsprincipen). Med stöd av dessa båda förutsättningar bevisar v. Mises den bekanta satsen av Bernoulli-Poisson-Tschebyscheff. Utifrån denna tankegång förtjänar satsen i fråga av skäl, som i det följande närmare skall anföras, ännu mindre att betraktas som fundamental.

I en uppsats i denna tidskrift (årg. 15, sid. 67 ff.) har

jag sökt ådagalägga, att poissonska teoremet, vilket av lektor Petrini anses böra göras till föremål för en mer eller mindre ingående matematisk behandling å gymnasiet, är alldeles för svårt på detta stadium. I denna punkt torde min framställning böra förtydligas.

Som förut anförts kan teoremet i fråga formuleras sålunda. Om q är sannolikheten för att ett av flera alternativ skall inträffa, om vidare ifrågavarande alternativ [1] vid n försök inträffar x gånger, om slutligen δ är ett godtyckligt litet tal, så är vid tillräckligt stora värden på n

$$(1) \qquad qn - \delta n < x < qn + \delta n,$$

eller med andra ord

$$(2) \qquad q - \delta < \frac{x}{n} < q + \delta,$$

d. v. s. $\frac{x}{n}$ närmar sig gränsvärdet q vid växande n.

Formeln (2) är ett uttryck för stabiliteten i den relativa frekvensen inom en tillräckligt omfattande försöksserie. Denna sats benämnes av Poisson de stora talens lag. Han betraktar den som den egentliga grundvalen för sannolikhetsräkning. Det sannolikhetsbegrepp, varom är fråga i formeln (2), grundar sig alltså på frekvensdefinitionen. Vid beviset för fördelningslagen utgå alla författare före v. Mises däremot från likamöjlighetsdefinitionen.

Bernoulli grep sig an problemet så, att han sökte bevisa, att

$$\sum_{x=n(q-\delta)}^{n(q+\delta)} \binom{n}{x} q^x p^{n-x}$$

går mot 1, då n närmar sig oändligheten. Genom två enkla exempel, det ena omfattande 41, det andra 1001 termer, har jag velat förmå läsaren att tänka sig in i de svårigheter, med vilka man här har att laborera. Bernoulli uppgiver,

[1] Hos Bernoulli och Poisson är det endast fråga om ett enkelt alternativförsök.

att han i tjugu år var upptagen med utarbetande av det bevis, som återfinnes i det år 1713, några år efter hans död, utkomna verket *ars conjectandi*.

Efter uppfinningen av infinitesimalkalkylen har beviset kunnat göras ofantligt mycket enklare, varjämte det ock vunnit i skärpa. Här kan icke komma i fråga att gå in på beviset. Det må vara tillräckligt att redogöra för tankegången i den vedertagna framställningen.

Om man i (1) ersätter qn med m, d. v. s. inför det bernoulliska medelvärdet (förväntningen), samt vidare inför en ny variabel λ genom att sätta

$$\lambda\sigma = \delta n, \tag{3}$$

då σ är den bernoulliska spridningen, d. v. s. lika med $\sqrt{npq}$ (se årg. 15, sid. 67 ff.), så antager (1) formen

$$m - \lambda\sigma < x < m + \lambda\sigma.$$

Enligt (3) är

$$\lambda = \delta \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}},$$

vadan λ växer, då n växer.

Sättes

$$x = m + \lambda\sigma,$$

kallas λ den relativa avvikelsen.[1] Beviset går ut på att finna sannolikheten för att den relativa avvikelsens absoluta belopp understiger ett givet värde λ. Det visar sig, att man här får att göra med Gauss' fördelning och att sannolikheten ifråga angives av uttrycket

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(\lambda) - 1$$

(jfr årg. 14. sid. 21). Av tabellen sid. 212 i samma årgång inses, att med växande λ går $2\Phi(\lambda) - 1$ hastigt mot 1.

Till belysning av det anförda hänvisas till de förut omnämnda båda exemplen (årg. 15, sid. 70 ff.). I det exempel,

[1] I den föregående framställningen (årg. 14 sid. 21 och årg. 15 sid. 72) har $\lambda\sigma$ betecknats med ε.

där man hade att göra med 41 termer, blev $\lambda = 1.519$ och i det exempel, där man rörde sig med 1001 termer, blev $\lambda = 3{,}259$. I förra fallet blev sannolikheten $2\Phi(\lambda) - 1$ lika med 0.8782, i senare fallet lika med 0.9988. Slutligen må anföras två exempel, som förekomma i läroböckerna: det ena sannolikheten för att x ligger mellan gränserna $m \pm \sigma$, det andra sannolikheten för att x ligger mellan $m \pm 3\sigma$. Den förra är lika med $2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$. Den senare är lika med $2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$. På grund härav säger man att $\frac{2}{3}$ av statistiska seriens element ligga mellan $m \pm \sigma$ och att *alla* element ligga mellan $m \pm 3\sigma$. (Se årg. 14, sid. 13 och 21).

Eftersom fördelningslagen på det antydda sättet härledes ur likamöjlighetsantagandet, gäller olikheten (2), betraktad som ett korollarium av nämnda lag, endast under likamöjlighetsantagandet.

Går man in för det statistiska sannolikhetsbegreppet — och något annat borde enligt min mening knappast bli tal om, när man åsyftar att nå fram till praktiska tillämpningar — har det poissonska teoremet för den, som icke behöver tränga djupare in i saken, en rent av trivial innebörd, nämligen att man vid ett upprepande av ett försök kommer till ett visst gränsvärde, d. v. s. samma sak som av v. Mises lades till grund för sannolikhetsdefinitionen. Djupare sett innebär emellertid satsen jämväl en utsago över fördelningen av ett visst alternativ vid ett obegränsat upprepat försök. Matematikern nöjer sig givetvis icke med att på sätt här föreslagits antaga, att Gauss' kurva erhållits genom erfarenheten. För praktiska tillämpningar torde man däremot icke ha behov av att tränga djupare in i de stora talens lag.

Med det anförda har jag velat ytterligare framhålla, att man vid en elementär framställning icke kan komma fram till fördelningslagen via bernoulliska teoremet, utan att man nödgas taga sin tillflykt till erfarenheten om kurvans utseende. Därmed har jag, såsom lektor Petrini synes för-

mena, ingalunda frångått min mening, att sannolikhetskalkylen icke tillhör skolan.

Såsom antytts i en uppsats, årg. 14, sid. 8, härledde Gauss ett uttryck för felintensiteten. Detta offentliggjordes år 1809 i hans »Theoria motus corporum coelestium», men var bekant redan 1795.[1] Sedermera lyckades Laplace att fullständigt beräkna fördelningen vid ett stort antal försök och fann, att denna återgives av Gauss' klockkurva. (Laplace, Théorie analytique des probabilités, 1812).

(Forts.)

Att bestämma trianglar, vilkas sidor, yta och höjder hava rationella talvärden.

Av C. A. MEBIUS.

Låt triangelns sidor vara a, b, c, $a \geqq b$, och x höjden mot c. Äro projektionerna av a och b på c y och z resp., så är

$$c = y + z \text{ eller } c_1 = y - z,$$

allteftersom båda vinklarna vid c äro spetsiga eller den ena trubbig.

Vidare är

$$x^2 = a^2 - y^2 = b^2 - z^2.$$

Man har alltså att bestämma rationella värden, som satisfiera detta system och som uppfylla villkoren

$$a + b > y + z > a - b.$$

Vi välja för x ett helt tal sådant, att x^2 kan uppdelas i två faktorer på två *olika* sätt, och sätta

$$x^2 = \alpha\beta = \gamma\delta.$$

Då nu

$$x^2 = (a + y)\ (a - y) = (b + z)\ (b - z),$$

så kunna vi antaga

$$a + y = \alpha, \quad b + z = \gamma,$$
$$a - y = \beta, \quad b - z = \delta.$$

[1] Se F. W. Hultman, Minsta qvadratmetoden, Stockholm 1860.

Härav följer

$$2a = \alpha + \beta\,, \quad 2y = \alpha - \beta\,,$$
$$2b = \gamma + \delta\,, \quad 2z = \gamma - \delta\,,$$

och således

$$2c = \alpha - \beta + \gamma - \delta \text{ och } 2c_1 = \alpha - \beta - (\gamma - \delta).$$

Triangelns yta bestämmes ur ekv.

$$2T = xc \text{ eller } 2T_1 = xc_1$$

och höjderna mot a och b ur

$$2T = ah_a = bh_b \quad \text{eller} \quad 2T_1 = ah'_a = bh'_b.$$

Om de hela talen α, β, γ, δ uppfylla villkoren

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta > \alpha - \beta \pm (\gamma - \delta) > \alpha + \beta - (\gamma + \delta),$$

så anger ovanstående system en lösning med rationella värden på triangelns sidor, yta och höjder.

Villkoren äro uppfyllda om

$$\gamma > \beta \text{ eller } \delta > \beta\,,$$

allteftersom man tager tecknet + eller — i mellersta ledet. Man bör således låta β vara den minsta faktorn i uppdelningen av x^2.

Exempel. $x = 10$.

$$x^2 = 100 \,.\, 1 = 50 \,.\, 2 = 25 \,.\, 4 = 20 \,.\, 5 = 10 \,.\, 10.$$

I följande tabell äro för erhållande av heltalsvärden $2a$, $2b$, $2c$ och $2c_1$ angivna i stället för a, b, c, c_1.

$\alpha\beta$	$\gamma\delta$	$2a$	$2b$	$2c$	$2c_1$
100 . 1	50 . 2	101	52	147	51
100 . 1	25 . 4	101	29	120	78
100 . 1	20 . 5	101	25	114	84
100 . 1	10 . 10	101	20	99	
50 . 2	25 . 4	52	29	69	27
50 . 2	20 . 5	52	25	63	33
50 . 2	10 . 10	52	20	48	
25 . 4	20 . 5	29	25	36	6
25 . 4	10 . 10	29	20	21	
20 . 5	10 . 10	25	20	15	

Således 16 trianglar, av vilka fyra äro rätvinkliga. I två av dessa hava sidorna en gemensam faktor; bortdivideras denna, så erhålles sidorna 13, 5, 12 och 5, 4, 3.

Är $\gamma = \delta$, så är $z = 0$ och följaktligen triangeln rätvinklig. Om man för x har valt ett primtal, så är den enda framställningen av x^2 som två olika heltalsprodukter

$$x^2 \,.\, 1 = x \,.\, x.$$

Triangeln är således rätvinklig. Härav framgår följande egendomliga sats:

Om i en spetsvinklig eller trubbvinklig triangel talvärdena för sidor och yta äro rationella, kan talvärdet för en höjd icke vara ett primtal.

Vill man beräkna ytan efter den kända formeln

$$T^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c),$$

så blir räkningen mera omständlig.

I första fallet, då $c = y + z$, fås

$$p = \frac{\alpha+\gamma}{2},\quad p-a = \frac{\gamma-\beta}{2},\quad p-b = \frac{\alpha-\delta}{2},\quad p-c = \frac{\beta+\delta}{2}$$

och härav

$$T^2 = \tfrac{1}{16}\,(\alpha+\gamma)\,(\gamma-\beta)\,(\alpha-\delta)\,(\beta+\delta).$$

Inför man här

$$\beta = \frac{x^2}{\alpha} \quad \text{och} \quad \delta = \frac{x^2}{\gamma},$$

så visar det sig, att uttrycket för T^2 är en jämn kvadrat, så att

$$T = \frac{x(\alpha+\gamma)\,(\alpha\gamma-x^2)}{4\alpha\gamma} = \frac{x(\alpha+\gamma)\,(\gamma-\beta)}{4\gamma} = \frac{xc}{2};$$

samma substitution ger nämligen värdet

$$c = \frac{(\alpha+\gamma)\,(\gamma-\beta)}{2\gamma}.$$

I andra fallet, då $c_1 = y - z$, fås

$$T_1^{\,2} = \tfrac{1}{16}\,(\alpha+\delta)\,(\delta-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta+\gamma).$$

Högra membrum är också här en jämn kvadrat nämligen på

$$T_1 = \frac{x(\alpha + \delta)(\delta - \beta)}{4\delta}.$$

Genom redaktionen har jag blivit uppmärksamgjord på att den här använda metoden för problemets lösning och som uttryckes genom ekv. $x^2 = \alpha\beta = \gamma\delta$ är densamma, som återfinnes i ARVID LINDHAGENS uppsats »Något om den pytagoreiska ekvationen», intagen i denna tidskrift årg. 3 sid. 3 och 4 (1919). Problemställningen är dock något olika i de båda uppsatserna och dessa täcka varandra icke.

Nålproblemet.

I fråga om geometrisk sannolikhet finns det en hel del trevliga experiment och intressanta resultat (jfr F. CZUBER »Geometriske Wahrscheinlichkeiten»), och som ett exempel härpå omnämde jag i en föregående uppsats (»sannolikhetsräkning och allmänbildning, denna tidskrift 1931, sid. 83) det s. k. nålproblemet. Då den elementära teorin för detsamma inte tycks vara mera känd, vill jag här i största korthet meddela den.

På ett streckat papper, där avståndet mellan de parallella linjerna är $= a$, släpper man ned en slant med diametern d $(d < a)$. Sannolikheten för att slanten skall råka något av strecken är då tydligen $= \frac{d}{a}$. Alla lika stora element av omkretsen ha lika stor utsikt att råka ett av strecken. Om vi istället för en slant ta en konvex platt kropp vilken som helst med samma omkrets p som den cirkelrunda slanten, så ha även här alla lika stora element av omkretsen samma utsikt att råka ett streck. Då nu slanten och den andra kroppen ha samma omkrets, så blir sannolikheten s för att kroppen skall råka ett av strecken densamma som för slanten, förutsatt att kroppen inte kan råka mer än ett streck åt gången, alltså $= \frac{d}{a}$, där $d = \frac{p}{\pi}$,

$$\therefore s = \frac{p}{\pi a}.$$

Om nu kroppen är lång och smal av längden l ($l < a$), så är $p = 2l$,

$$\therefore s = \frac{2l}{\pi a}.$$

Experimentet göres vanligen så, att man släpper ned en knappnål på ett streckat papper, där avståndet mellan alla de parallella strecken, två och två, är dubbelt så stort som nålens längd ($a = 2l$). Om nålen råkar något streck c gånger av n, så är s approximativt $= \frac{c}{n}$

$$\therefore \frac{n}{c} \text{ approximativt} = \pi.$$

»De stora talens lag» kan i detta fall symboliskt uttryckas genom formeln

$$\lim_{n = \infty} \frac{c}{n} = s,$$

och experimentet kan tjänstgöra som en utmärkt illustration härtill. Om nämligen lärjungarna i en klass utföra i hemmet var och en 100 försök, så blir de särskilda pojkarnas värden på π, bestämt på detta sätt, föga noggranna, medan hela klassens värde bör bli ganska bra. *Henrik Petrini.*

Framställning av fosforväte som laborationsförsök.

Kalciumfosfid, för vars framställning handledningarna föreskriva vit fosfor, kan med samma lätthet men mindre risk erhållas med användning av röd fosfor. En liten järndegel beskickas med ett par skedar metalliskt kalcium och upphettas kraftigt utan lock, tills metallen just börjar brinna. I detta ögonblick tillsätter man en i beredskap hållen portion röd fosfor, ungefär en sked. Det blir en häftig, men alldeles ofarlig reaktion med glänsande eldfenomen. Man lägger nu på ett degellock och låter degeln svalna fullständigt eller åtminstone så mycket, att innehållet ej tänder sig, då man lyfter på locket. Den bildade fosfiden bildar en svart, hård massa, som knappast kan avlägsnas ur degeln. Denna nedlägges i en stor bägare med vatten och utvecklar då stora mängder självantändligt fosforväte. Samtidigt blir degeln ren.

I motsats till den vita kan ju den röda fosforn utan betänkligheter utlämnas till lärjungarna, varför experimentet lämpar sig att utföra som laborationsförsök. *G. Starck.*

Ett ofarligt försök med nitroglycerin.

Försök med sprängämnen äro ju alltid riskabla men tjusa starkt skolpojkarna, som finna smällar och explosioner synnerligen tilltalande. Bland försök, som utföras med sprängämnen, må nämnas förpuffning av svartkrut, explosion av små mängder svavel och kaliumklorat, resp. tändsatsen från tändstickor, framställning av cellulosanitrat och förbränning eller explosion av detta. Däremot finns mig veterligen ingen lärobok i kemi, som rekommenderar försök med nitroglycerin, vilket ju är det farligaste av alla sprängämnen. Man kan dock utan risk demonstrera den oerhörda explosionskraften hos nitroglycerin, vilket sker på följande sätt.

På apoteken finns att köpa 1%-ig lösning av nitroglycerin i sprit. Preparatet har endast obetydlig användning och ordineras stundom mot kärlkramp. I en skiljetratt om 100 cm³ blandas 15 cm³ av nitroglycerinspriten med 30 cm³ vatten. I den utspädda spriten är nitroglycerinet olösligt och avskiljes i form av fina droppar, som ge vätskan ett opaliserande utseende. Efter en eller ett par dagar ha dropparna flutit ihop till en tung, gulaktig oljedroppe i skiljetrattens botten. Ha oljedropparna fastnat på glasväggen, kan man lätt genom försiktig rivning med en glasstav få dropparna att flyta ihop. Genom att försiktigt öppna skiljetrattens kran kan man få oljedroppen att stanna i krankiken, varefter kranen åter stänges och vätskan i tratten slås ut. Nitroglycerindroppen tas på ett urglas, eventuellt medföljande spritlösning suges upp med filtrerpapper, och därefter låter man nitroglycerinet sugas upp i ett litet kapillärrör av 0,5 à 1 mm vidd. Man bör inte ta mer än c:a 1 cm vätska i kapillärröret och för sedan med en tång in det i en gaslåga, då nitroglycerinet exploderar med en säregen, oerhört våldsam smäll, som är ägnad att ge en god föreställning om detta sprängämnes farlighet.

Nitroglycerinet orsakar som bekant en svår huvudvärk. En och annan minns kanske, hurusom på den tiden, då metoden att spränga kassaskåp med dynamit var ny, ett par utövare av »yrket» gått ifrån halvgjort »arbete», trots att de ej blivit störda. Då dessa herrar senare grepos, kom förklaringen; de hade handskats litet ovarsamt med dynamiten och fått så svår huvudvärk, att de ej orkade fortsätta.

Skulle någon av eleverna vilja erfara sensationen av ¼ timmes huvudvärk av nitroglycerin, är det tillräckligt att taga in *3 droppar* ur en droppflaska av den 1%-iga nitroglycerinlösningen.

Bror Gustaver.

Bokanmälningar.

Norsk Matematisk Forenings Skrifter, serie II, Nr 1—12, Till Minne om Professor Ludvig Sylow, F. $^{12}/_{12}$ 1832, D. $^{7}/_{9}$ 1918, Oslo 1933, 96 sid.

Av »Norsk Matematisk Forenings Skrifter» utkom serie I under åren 1921—1928. Nu föreligger serie II utgiven såsom en minnesskrift över professor Sylow med anledning av 100-årsdagen av hans födelse. Häftet inledes med minnestal över Sylow hållet av professor Störmer i norska vetenskapsakademien den 7. mars 1919. I en följande uppsats av Th. Skolem redogöres mer ingående för Sylows vetenskapliga verksamhet. Den gick väsentligen i tre riktningar. Han är först den grundlige Abelforskaren och, tillsammans med Lie, utgivaren av Abels verk, som han försett med noter, av vilka några utgöra nästan självständiga avhandlingar. Dessa studier torde ha väckt intresse för de två områden inom vilka hans forskningar i huvudsak rört sig: teorien för elliptiska funktioner och gruppteorien. Hans arbeten inom gruppteorien, som Skolem närmare behandlar, ha ju fått en grundläggande betydelse vid studiet av en ekvations galoisgrupp, alltså vid undersökningen av dess algebraiska lösbarhet.

Följer så en bibliografi av H. Bergh Kragemo över skrifter av och om Sylow. Häftet innehåller vidare följande avhandlingar:

Viggo Brun: *Sur la solution d'une équation differentielle ordinaire du premier ordre.* Eulers metod att finna en lösning till $y' = f(x, y)$ svarande mot (x_0, y_0) går ut på att söka en lösning i form av en dignitetsserie i $(x - x_0)$, varvid koefficienterna erhållas genom successiv derivation av ekvationens led. Förf. anger en metod för räkningens genomförande.

Alf Guldberg: *Zur Theorie der theoretischen Statistik.* Den teoretiska statistikens problem gå, enligt v. Mises, ut på att avgöra, huruvida en given statistisk serie kan betraktas som ett ändligt avsnitt av ett »kollektiv». Förf. visar hur man kan uppställa kriterier på att en statistisk serie av två (eller flera) variabler (korrelationstabell) skall kunna approximeras med Bernouillis fördelningsfunktion. Förfarandet grundar sig på att denna funktion satisfierar en differensekvation och kan därför utsträckas till fördelningsfunktioner, vilka ha denna egenskap.

Poul Heegaard: *Über die Heawoodschen Kongruenzen.* Heawood överförde det bekanta topologiska fyrfärgsproblemet till ett talteoretiskt, nämligen att finna lösningarna till ett system av lineära och kvadratiska kongruenser. Förf. studerar detta med hjälp av kombinatoriska schemata. Elimination av de obekanta leder till ett resultat, som utgör det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att kongruenssystemet skall ha lösningar.

Ingebrigt Johansson: *Zu den zweidimensionalen Homotopiegruppen.* Här undersökes sammanhanget mellan punkt-cirkelgruppen (Poincarés fundamentalgrupp) och v. Kerékjártós cirkeltorus-grupper. Förf. kommer till det resultat, att det finnes en invariant undergrupp V till en undergrupp U till fundamentalgruppen G och en invariant undergrupp Δ till en mot ett element i G hörande cirkel-torus-grupp Γ. Mellan de mot dessa invarianta undergrupper svarande faktorgrupper råder en 1-isomorfism:

$$u/v = \Gamma/\Delta.$$

R. Tambs Lyche: *Remarques sur l'itération des fonctions de deux variables et les équations fonctionelles qui s'y rattachent.* Förf. generaliserar Koenigs klassiska metod att genom iteration bilda en funktionsföljd likformigt konvergerande mot en gränsfunktion, satisfierande Schröders funktionalekvation, till fallet med två variabler, och behandlar upplösningen av motsvarande generalisering av nämnda funktionalekvation, nämligen

$$\varphi(f(x, y), g(x, y)) = \lambda\varphi(x, y)$$

där f och g äro de givna funktionerna och φ den obekanta funktionen.

Trygve Nagell: *Die Bestimmung der Ringe mit gegebener Diskriminante in einem algebraischen Zahlkörper.* I ett föregående arbete har förf. bevisat satsen: Det finnes blott ett ändligt antal ringar med given diskriminant inom en given algebraisk talkropp. Det förutsattes där, att ett talkroppen genererande tal var bekant. I föreliggande avhandling visas hur metoden kan betydligt förkortas, om man antar ett bassystem till kroppen vara bekant.

Th. Skolem: *Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems.* För den naturliga talserien uppställes ett ändligt axiomsystem och det visas att varje »Aussage», i preciserad mening, som kan härledas ur axiomsystemet jämte axiomet om det uteslutna tredje, också är giltig för lineärt ordnade mängder av högre »ordningstyp». Av bevisets art framgår att så alltid blir fallet, vilka nya av de redan uppställda axiomen oberoende egenskaper hos den naturliga talserien än fogas till axiomsystemet.

Carl Störmer: *Développement des coordonnées d'une courbe gauche en séries d'après des puissances descendantes de l'arc.* Med hjälp av dylika potensutvecklingar efter integralkurvans båglängd löses ett system av differentialekvationer, som uppträder vid olika problem inom den kosmiska fysiken.

Olaf M. Thalberg: *Some Theorems concerning Pencils of Curves.* Förf. granskar en sats av Chasles rörande frågan huru många av n^2 baspunkter till en kurvskara C^n, liggande på en kurva av graden $m (m > n)$ kunna väljas arbiträrt. Vidare bevisas med hjälp av Brill-Noethers restsats några satser angående kurvskaror.

V. Stenström.

Traité de Chimie minérale, publié sous la direction de Paul Pascal (sécrétaire général: Paul Baud). Masson et Cie, Paris 1931—33.

Detta verk, som är en fransk motsvarighet till Abeggs Handbuch der anorganischen Chemie och Mellor, A comprehensive Treatise of inorganic Chemistry, är avsett att utkomma i 12 band, varav 9 redan utgivits i anmärkningsvärt rask följd. Utgivaren har strävat efter att åstadkomma ett arbete, som »återger kemiens nuvarande ståndpunkt i en för alla tillgänglig form, undvikande torkan av en kritiklös kompilation, men tillräckligt rikt på fakta och litteraturhänvisningar, för att alla den moderna kemiens strävanden skola rymmas däri». Av allt att döma hava Pascal och hans stora stab av medarbetare fullt förverkligat detta program och åstadkommit ett verk, som med rätt kan ställas vid sidan av de nämnda engelska och tyska handböckerna. Bibliografien är i de fall, som anmälaren haft möjlighet att kontrollera, absolut fullständig, framställningen på en gång elegant och exakt, den typografiska utstyrseln präglad av traditionell fransk klarhet. Trots sin karaktär av fullständig handbok i oorganisk kemi är arbetet icke endast läsvärt, utan också i hög grad läsbart.

Att det omfångsrika verket här anmäles, är utom av dess förträffliga egenskaper även motiverat av dess låga pris, som borde göra dess anskaffande möjligt även för läroverksbibliotek, åtminstone de ekonomiskt något så när gynnade. De hittills utgivna 9 banden kosta sammanlagt 1340 fr., en icke oöverkomlig utgift med nu gällande franckurs.

Innehåll, omfång och pris för de olika banden, som få köpas separat, anges av följande översikt.

1. Inledning, luft, vatten, väte, syre, ozon, vätesuperoxid, fluor, klor, brom, jod, 860 sid., 120 fr.

2. Svavel, selen, tellur, teknisk framställning av svavelsyra och oleum, 594 sid., 120 fr.

3. Kväve, fosfor, arsenik, kväveindustri, 788 sid., 140 fr.

4. Antimon, vismut, vanadin, niob, tantal, bor, 630 sid., 120 fr.

5. Kol, kisel, titan, germanium, zirkon, hafnium (celtium), ammonium, 871 sid., 165 fr.

6. Alkalimetaller, alkaliska jordartsmetaller och deras industrier, outgiven.

7. Beryllium, magnesium, zink, kadmium, aluminium, gallium, indium, de lätta metallernas metallurgi, cement, glas, 643 sid., 120 fr.

8. Sällsynta jordarter, kvicksilver, koppar, silver, guld, outgiven.

9. Tenn, bly, tallium, mangan, rhenium, järn, 932 sid., 170 fr.

10. Nickel, kobolt, krom, allmän komplexkemi, 1118 sid., 200 fr.

11. Molybden, volfram, uran, torium, osmium, rutenium, iridium, rodium, platina, palladium, 836 sid., 155 fr.

12. Radioaktiva element, ädelgaser, legeringar, outgiven.

Gunnar Starck.

Ernest S. Hedges, *Chapters in modern inorganic and theoretical chemistry.* Edward Arnold & Co., London, 1932. 279 sid., pris inb. kr. 12: 50.

De av förf. valda kapitlen behandla: Det periodiska systemet, Allotropi, Några mindre vanliga element, Sällsynta jordarter, Två nya element, rhenium och hafnium, Komplexa joner och koordinationsföreningar, Radioaktivitet, Atomens byggnad, Isotoper, Valensteori, Kristallstruktur, Några oorganiska katalytiska reaktioner, Föreningar av metaller, Korrosion, passivitet och rostskydd, Oorganiska kolloider.

Av översikten framgår, att det är några aktuella områden inom oorganisk och teoretisk kemi, som här behandlas. Framställningen är icke populär i vanlig bemärkelse, men lätt att följa; en elev i högsta ringen av realgymnasiet borde utan svårighet kunna tillgodogöra sig innehållet. Även för lärare är arbetet väl värt att rekommendera, bl. a. på grund av de hänvisningar till utförligare monografier, som åtfölja varje kapitel. Läsning av ett eller två kapitel skulle kunna lämpa sig som uppgift för enskilt arbete.

G. S.

Ida und Walter Noddack, *Das Rhenium.* Leopold Voss, Leipzig, 1933. 86 sid., pris, kart. c:a 11 kr.

Arbetet utgör en uttömmande redogörelse för rheniums upptäckt, förekomst, utvinnande, metallens och dess föreningars egenskaper. Under den korta tidrymden av 8 år har detta grundämne,

som författarna påpeka, tillrygglagt vägen från ett omstritt milligrampreparat till en teknisk produkt, som nu av de Förenade kemiska fabrikerna i Leopoldshall tillverkas till en mängd av 120 kg kaliumperrhenat pr år och ett pris av c:a 13 M/g. Rheniums kemi är också ganska grundligt utforskad, varom 152 citerade avhandlingar i sin mån vittna.

Författarnas-upptäckarnas kompetens att ge en saklig och vederhäftig framställning av sitt ämne behöver icke särskilt framhållas. Arbetet innehåller allt som är känt om rhenium och är samtidigt ett skolexempel på modern oorganiskt-kemisk forskning och dess samarbete med fysik och geokemi. Förff. tillägna sin bok minnet av Berzelius. *G. S.*

Herbert Alber, *Mikrokemi.* Svenska Bokförlaget, 1933. 77 sid., pris häft. kr. 6: —.

Arbetet är en översättning till svenska av fyra föredrag, hållna vid den kurs i mikrokemiska arbetsmetoder, som av Metallografiska Institutet anordnades i Stockholm 1932. Författaren, flerårig assistent till den bekante mikrokemikern F. Emich, som av sjukdom hindrades att såsom tänkt själv leda kursen, har givit en instruktiv och välskriven framställning av den oorganiska mikrokemien. Denna har i likhet med den organiska, av Pregl utbildade, numera fått en så mångsidig användbarhet, att en kurs däri kanske kommer att ingå i varje kemists utbildning. Något direkt intresse för skolundervisningen har väl mikrokemien ej; dess subtila arbetsmetoder torde nog ligga över våra elevers horisont. Dock kunde en del uppgifter för enskilt arbete mycket väl hämtas från detta område, t. ex. utförandet av fällningsreaktioner under mikroskop, utförande av s. k. fiberreaktioner (färgreaktioner i fina trådar), kokpunktsbestämning med små vätskemängder, arbeten i kapillärrör. Arbetet rekommenderas på grund av sitt eget värde och för de impulser det kan ge till undervisningens fromma. *G. S.*

Lennart Elfman, *Elementär hållfasthetslära.* 93 sid., 95 ex., A. Bonniers förlag (Svenska bokförlaget) 1933, kr. 3: 75.

Elfmans nyutkomna lärobok i hållfasthetslära karaktäriseras i likhet med hans tidigare arbeten av en enkel och klar stil, redig uppställning, många och utmärkta figurer samt goda räkneexempel både i text och som rena övningsexempel.

Bokens omfång har enligt förf. avvägts med hänsyn till den kursplan, som K. Skolöverstyrelsen fastställt för de tekniska gymnasierna. Denna kursplan är dock mycket allmänt hållen och lämnar plats för både enkla och mera komplicerade hållfasthets-

problem. Enligt min mening har Elfman tolkat denna kursplan väl snävt och uteslutit i såväl text som övningsexempel en hel del av de problem, som bruka vara föremål för behandling vid våra tekniska läroverk. Däremot kan man med glädje konstatera, att förf. vid sina härledningar använt differential- och integralräkning, där sådana räknemetoder förenkla framställningen.

Inledningsvis redogör förf. för hållfasthetslärans innehåll. Följande kapitel avhandla i ordning de allmänna hållfasthetsfallen, och bokens slutkapitel beröra mera speciella hållfasthetsproblem såsom hållfasthet hos cylindriska och sfäriska kärl utsatta för inre och yttre tryck, axlars kritiska varvtal o. d.

På sid. 43 uppvisar förf. att vid böjning $\frac{dM_b}{dx} = S_x$ och drager därav den slutsatsen, att farligt snitt är beläget, där skärkraften S_x är noll eller ändrar tecken. Det sistnämnda framgår dock icke av bevisföringen men kan lätt visas genom grafisk derivering av en antagen diskontinuerlig momentfunktion.

På sid. 45—47 härledes uttrycket för formförändringen vid balkar utsatta för böjning. Här lämnas en mycket elegant metod att bestämma nedböjningen vid de s. k. »fyra första belastningsfallen». Då metoden har begränsade användningsmöjligheter, hade det dock icke varit ur vägen att även visa, huru man med elastiska linjens diff. ekv. kan lösa mera invecklade problem.

Skuvspänningarnas fördelning vid böjning förbigår förf. helt och hållet med motivering, att skuvspänningarna äro obetydliga i jämförelse med normalspänningarna. Så är visserligen i allmänhet fallet, men vid korta balkar — särskilt träbalkar — och stora belastningar måste dock hänsyn tagas även till skuvspänningarna vid dimensioneringen. Beräkning av nitdelning vid nitade balkar o. d. kräver även kännedom om skuvspänningarnas fördelning och bör därför icke förbigås i en lärobok på detta stadium.

Kapitlet om hållfasthet mot avknäckning har i Elfmans lärobok fått en fylligare och åskådligare utformning än i tidigare svenska läroböcker. Här må bara den lilla anmärkningen göras, att i tabellen på sid. 62 och i fig. 49 även den undre gränsen för Tetmajerformelns användningsområde borde ha angivits.

I kapitlet om sammansatt hållfasthet borde nog något ha nämnts om de olika arbetshypoteser angående brottorsaken, som ligga till grund för S:t Venants och Guests formler. Detta så mycket mera som de experimentella undersökningarna peka på, att den av Mohr-Guest uppställda hypotesen ingalunda spelar en så undanskymd roll, som läsaren kan tro av Elfmans framställning.

Martin Lien.

Conrad Lönnqvist, *Jordens skapelse och undergång.* Verdandis småskrifter N:r 359. 75 sid., 85 öre samt *Solens öde.* Verdandis småskrifter N:r 360. 68 sid., 85 öre. Albert Bonniers förlag 1933.

De senaste decenniernas astronomiska forskning har så gott som uteslutande varit ägnad stellarastronomien, och vår »hembygds»-astronomi, d. v. s. utforskandet av vår egen sol och vårt planetsystem har kommit i efterhand. Anledningen ligger i öppen dager. Spektralanalysen och fotografikonsten ha vid sitt hastiga uppsving lämnat ett överväldigande stellarastronomiskt material, som måste bearbetas i första hand, och astronomerna ha helt enkelt inte haft tid med de oss närmast liggande celesta objekten. Ifråga om kunskapen om vårt solsystems uppkomst och utveckling stå vi sålunda nästan på samma ståndpunkt som på 1800-talet. Likväl är detta en fråga, som måste intressera oss på det allra högsta. Då problemet på 1700-talet togs upp till diskussion, var det två hypoteser, som ställdes mot varandra — Kant-Laplace's nebularteori och Buffons hypotes om planeternas uppkomst genom en kollision mellan solen och en komet. Det blev då den förra, som avgick med segern. De invändningar, som kunde göras mot densamma, ha i stort sett kunnat bortförklaras av Pickering m. fl. På allra sista tiden har Buffon kommit till heders igen genom den teori, som framställts av Sir James Jeans, och som kan sägas vara en förbättring av Buffons hypotes. Buffon, som ej kände till kometernas ringa massa, talade visserligen om en kollision mellan solen och en komet, under det Jeans påstår, att solen en gång för många millioner år sedan på nära håll passerats av en mötande sol, men tankegången är i stort sett densamma, då båda anse att planeterna uppkommit genom inverkan av en främmande himlakropp. Det är Jeans teorier, sedda i samband med den moderna stellarforskningens resultat, som förf. i den förstnämnda av sina båda böcker huvudsakligen uppehåller sig vid. Även om man ej — såsom förf. tyckes göra — oförbehållsamt ansluter sig till nämnda teorier, kan man ej annat än finna dem intressanta och väl värda allt beaktande.

I *Solens öde* lämnar förf. en populär framställning av vår nuvarande uppfattning om fixstjärnornas beskaffenhet och utveckling. Russeldiagrammet och dess betydelse för vår förståelse av universums byggnad är framlagt på ett klart och redigt sätt. Man får ju ej vänta en fullständig utredning i en så kortfattad publikation. Men den, som läser boken, får dock en översikt över stellarforskningens största problem och några av de mest bärande av de hypoteser, som för närvarande uppställts rörande detsamma.

Ett par små anmärkningar må framföras. Förf. har frångått

den allmänt antagna benämningen *»absolut* ljusstyrka» och inför istället det mindre lämpliga *»verklig* ljusstyrka». Några av figurerna ha kastats om, så att det är svårt att finna dem. Så är t. ex. fig 18 placerad mellan figurerna 10 och 11, fig. 2 följer omedelbart efter fig. 4. *Algot Jenvall.*

Gradualavhandlingar.[1]

Sten Friberg, *Messungen der Refraktion und Dispersion in gasförmigen Kohlenwasserstoffen.* Lund 1933, 83 sid., 4 pl. Disp. i Lund 6 maj 1933. Opponenter: docent Osvald Lundquist, Lund och assistent Börje Svensson, Stockholm.

För ett stort antal fasta och flytande organiska föreningar kan molekylarrefraktionen additivt beräknas ur beståndsdelarnas atomrefraktion. Alltefter bindningens art måste atomrefraktionen för ett och samma grundämne tillskrivas olika värden.

Någon motsvarande regelmässighet hos gaserna har hittills icke kunnat påvisas.

Undersökningens mål var utförandet av bestämningar av refraktion och dispersion inom det synliga och det ultravioletta spektrum för gasformiga kolväten. Härmed avsågs att bidraga till samlandet av experimentellt material för undersökning av sambandet mellan gasers kemiska sammansättning och deras förmåga att bryta och dispergera ljuset, detta särskilt i avseende på homologa föreningar.

De undersökta gaserna äro metan, etan, propan, etylen och propylen. Refraktionen har bestämts för den gröna kvicksilverlinjen 564 mμ, dispersionen för nitton kvicksilverlinjer inom spektralområdet 580 till 230 mμ.

Metoden har angivits av Puccianti och har särskilt av J. Koch använts vid talrika undersökningar. Den vilar på användningen av en Jamins refraktometer. Mellan dennas parallellepipeder anbringas, koaxialt med var sin av de kohärenta strålarna, två glasrör innehållande den gas, som skall undersökas. Interferensstrimmorna avbildas på spalten av en spektrograf. Då kassetten borttagits, kan man iakttaga dem genom en kikare. Om antalet strimmor, som förskjutas vid tryckändring i det ena röret, räknas, kan man genom kombination av de spektralfotografier, som upptagits dels före dels efter tryckändringen, bestämma dispersionen med utomordentlig noggrannhet. Mätas tryck och temperatur samt längden av det ifrågavarande glasröret, kan även refraktionen bestämmas.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Tillförlitligheten i resultaten betingas framför allt av gasernas renhetsgrad. Vid apparaturens uppbyggande undvekos sådana material, som kunna befaras avge eller genomsläppa gaser, såsom gummi och metaller. Gasen renades före varje undersökning genom fraktionerad destillation med flytande luft eller kolsyresnö.

Den grafiska sammanställningen med på andra håll funna värden visar, att mätningar, vid vilka dessa försiktighetsmått icke skrupulöst iakttagas, endast slumpvis kunna föra till riktiga resultat.

De siffermässiga resultaten sammanfattades i formler. Fyrkonstantiga sådana visade sig kunna återge hela dispersionsförloppet med så stor noggrannhet, att differensen i allmänhet vida understeg 0,01%. Endast en undersökning med jämförlig noggrannhet har tidigare utförts på ett kolväte, nämligen av Cuthbertson på metan inom det synliga spektrum. Differenserna mellan de av honom observerade och de ur den av förf. uppställda formeln beräknade värdena varierade inom de ovan angivna gränserna.

Dessa dispersionsformler ha dock endast empirisk betydelse. Varje enskild konstant kan varieras inom utomordentligt vida gränser. Endast om egenfrekvenserna på annat sätt bestämts, kunna övriga formelkonstanter göras till föremål för teoretisk bearbetning.

I två avseenden framträder dock en märklig lagbundenhet:

1. Direkt av siffrorna liksom av den grafiska framställningen ses, att dispersionsförloppet är mycket nära detsamma för gaser som tillhöra samma homologa serie.

2. Refraktionsvärdena för de undersökta tre första leden i metanserien stå till varandra i heltalsförhållandena 4 : 7 : 10. För etylen och propylen är motsvarande förhållande 6 : 9. Samma heltalsförhållanden gälla för resp. föreningars valenssummor.

Gunnar Kellström, *Experimentelle Untersuchungen über Interferenz- und Beugungserscheinungen bei langwelligen Röntgenstrahlen.* Nova Acta Reg. Soc. Sci. Ups., Ser. IV, Vol. 8 N:o 5. Disp. i Uppsala 17 sept. 1932. Opponenter: docenten E. Bäcklin och fil. mag. S. von Friesen.

Vid tidigare försök att påvisa böjningsfenomen hos röntgenstrålar använde man sig av hård, kontinuerlig strålning, och resultaten blevo därför mestadels negativa. Sedan röntgenspektroskopien under det senaste decenniet, särskilt genom den Siegbahnska skolan, gjort storartade framsteg inom det långvågiga

området, hade bättre möjligheter skapats för utförande av de vanliga optiska interferens- och böjningsförsöken med röntgenstrålar. Dylika undersökningar äro av intresse inte minst ur pedagogisk synpunkt, då man därigenom på ett slående sätt kan påvisa, att röntgenstrålningen är av samma natur som ljuset; vidare kunna de tänkas få betydelse för absoluta våglängdsbestämningar.

Efter en inledande historik följer en diskussion av villkoren för den s. k. reguljära reflexionen och av den vid totalreflexion inträdande fasförändringen. Därefter beskriver förf. följande försök: Fresnel's och Lloyd's spegelförsök, böjning vid ett halvplan, vid en spalt (yttre och inre böjningsfransar) samt vid en smal skärm.

Till utförande av det Fresnel'ska spegelförsöket byggdes på Fysiska Institutionens verkstad en speciell högvakuumspektrograf. Vid upptagningarna användes — liksom i de följande försöken — AlKα-, CuLαβ- och CKα-strålning (våglängd resp. 8,3, 13,3 och 44,6 Å. E.). Vinkeln mellan speglarna varierade från 19″,6 till 86″,4. Fem olika interferensbilder reproduceras i 73 ggrs förstoring, och felen vid våglängdsbestämningarna diskuteras ingående. Enär de uppgå till 5 à 10%, är metoden ej ägnad för precisionsbestämningar, även om vissa möjligheter finnas för ökande av noggrannheten.

Vid det Lloydska spegelförsöket[1] användes som bekant endast *en* spegel. En del av den från spalten kommande strålningen faller under nära 90° infallsvinkel mot spegeln och interfererar efter reflexionen med den direkta strålningen. Ett antal sådana interferensbilder reproducerades i 60 ggrs förstoring. Våglängden kan beräknas med en noggrannhet av 2—3%. Vidare har förf. kunnat konstatera, att en fasförskjutning av ½ våglängd inträffar vid röntgenstrålarnas reflexion, vilket enl. teorien alltid bör inträffa *vid strykande reflexion*, antingen denna sker mot ett tätare eller tunnare medium. Detta sakförhållande var av särskilt intresse att få konstaterat, enär W. Linnik vid sitt utförande av det Lloydska försöket trott sig finna, att någon fasförskjutning ej ägde rum.

Undersökningen av böjningsfenomenen vid en symmetrisk spalt visar, att de yttre böjningsfransarna kunna användas för *relativa* våglängdsbestämningar med en noggrannhet av 0,5—1%. Med samma noggrannhet kan metoden även användas för *absoluta* bestämningar, om den symmetriska spalten ersättes av en smal (c:a 2 mm) spegel, mot vilken strålningen infaller under en mycket

[1] Se t. ex. T. Wetterblad, denna tidskr. årg. 11, sid. 85, 1927—28.

liten, noggrannt mätbar glansvinkel. Böjningsbilden blir i detta fall ej symmetrisk, och beräkningen ställer sig något komplicerad.

Slutligen studerades även de inre böjningsfransarna vid en symmetrisk spalt samt böjningen vid ett halvplan och vid en smal skärm. Som skärm användes därvid cylindriska metalltrådar med diametern 0,02—0,05 mm. I samtliga fall visade sig de experimentella resultaten stå i överensstämmelse med teorien. Dessa sistnämnda böjningsfenomen äro dock ej lämpade för noggranna våglängdsbestämningar.

Uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1932—33.[1]

Gustav Eriksson, *Förteckning över apparater, som anskaffats för fysiska institutionen vid högre allm. lärov. i Skövde.*

Albert Brund, *Undersökning rörande ett nytt förfaringssätt vid beredning av betong.* Härnösands tekniska gymnasium.

Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1932—33.

Göteborg: lektor A. Björkeson, Några allmänna principer vid anordnande av experiment med elektrisk ström (2 t.); Experimentell behandling av den fysikaliska optiken (2 t.); adjunkt J. Lundberg, Förel. i kemi (3 t.); lektor E. Möller, Metoder för problemlösningar utan användning av ekvation (3 t.).

Lund: lektor G. Forsström, Demonstrationsförsök på ljusets färgspridning och studiet av spektra; lektor O. D. Gertz, Den organiska kemiens metodik, med utblick på fysiologisk kemi och biokemi. (2 t.).

Stockholm: adjunkt O. P. Moberg, Undervisningen om kartprojektioner (2 t.); lektor E. Nordefeldt, Kemiundervisningens tre metoder: demonstration — laboration — enskilt arbete (2 t.); lektor G. Starck, Några lärjungeförsök i kemi (2 t.); lektor A. Wahlgren, Repetitionen på gymnasiet av realskolans geometrikurs (1 t.); lektor T. Wetterblad, Några metodiska frågor inom den geometriska optiken jämte förevisning av läroverkets på Kungsholmen fysiska institution (2 t.).

Uppsala: lektor T. B. Eriksson och adjunkt E. P. Granath, Lokalerna för undervisning i fysik (1 t. övning vardera); adjunkt K. V. Lenander, Matematikundervisningens metodik i realskolan, särskilt med hänsyn till arbetsskolemetoden (3 t.); adjunkt J. G. Palmgren, Läroverkets nya kemilokaler (1 t.).

[1] Uppgifterna om avhandlingar och föreläsningar ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

618) *Tre positiva tal ha det aritmetiska mediet a; deras harmoniska medium är h. För vilka sådana tal blir det geometriska mediet maximum eller minimum?* *S. Wigert.*

619) *En cirkel med centrum O och en punkt P äro givna. Att i cirkeln inskriva en likbent triangel, i vilken en av de lika sidorna är vinkelrät mot PO, medan den andra går genom P.* *X.*

620) *Från en given punkt dragas tangenterna till en given cirkel. En variabel tangent bildar med de förstnämnda tangenterna en triangel. Sök orten för medelpunkten till den omskrivna cirkeln.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

621) I en cirkelsektor inskrives en cirkel, varvid radien delas mitt itu i tangeringspunkten. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel.
Svar: $73°{,}74$.

622) Två cirklar ha radierna 3 cm och 8 cm samt medelpunktsavståndet 25 cm. Angiv radien i den cirkel, som tangerar såväl cirklarna som centrallinjen.
Svar: 12 cm och 252 cm.

623) Giv ekvationen för den gemensamma normalen till parablerna $x^2 = 4ay$ och $y^2 = 4ax$.
Svar: $x + y = 3a$.

624) En rörlig, med y-axeln parallell linje råkar parablerna $x^2 = -4y$ och $x^2 = 8(y-2)$ i A och B. Sök orten för mittpunkten till AB.
Svar: Parabeln $x^2 = -16(y-1)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.
[1] Uppg. 621—632 äro insända av *S. B.*

625) En med x-axeln parallell linje råkar parablerna $y^2 = 4ax$ och $x^2 = 4ay$ i A och B. Sök maximum av längden AB, då punkterna A och B ligga i 1:a kvadranten.

Svar: $\frac{3a\sqrt[3]{2}}{2}$.

626) Tangenten i en punkt P på kurvan $x^2y = 1$ råkar kurvan i Q. Visa, att PQ av y-axeln delas i förhållandet 2:1.

627) För vilket a-värde skära kurvorna $y = x^3 + a$ och $y^3 + x = 0$ varandra under rät vinkel?
Svar: $a_1 = 0$; $a_2 = 2$; $a_3 = -2$.

628) Giv ekvationen för den gemensamma tangenten till kurvorna $y = x^3$ och $y^3 = 81x$.
Svar: $3x - y - 2 = 0$ och $3x - y + 2 = 0$.

629) Sök orten för en punkt, varifrån kateterna i en likbent och rätvinklig triangel synas under samma synvinkel.
Svar: Orten utgöres dels av höjden mot hypotenusan, dels av hypotenusans förlängningar, dels av halva den omskrivna cirkeln.

630) En triangel har ett hörn i origo och sina övriga hörn i skärningspunkterna mellan linjen $y = x + l$ och cirkeln $x^2 + y^2 = -4y + 8$. Bestäm l så, att triangelns yta blir maximum, och angiv maximivärdet.
Svar: $l_1 = 5$ och $l_2 = -2$; $T_1 = 2{,}5\sqrt{15}$ och $T_2 = 2\sqrt{2}$.

631) Vilket värde bör a ha i ekvationen $y = x^4 - ax^2 + 6$ för att kurvans maximi- och minimipunkter skola bli hörn i en triangel med tyngdpunkten i origo?
Svar: $a = 6$.

632) En transversal genom en triangels tyngdpunkt råkar sidorna AB och AC i resp. M och N. Visa, att

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3.$$

Lösningar till uppg. 575—577.

575) *En normalkorda i en parabel är given till längd och läge. Bestäm enveloppen för parabelns styrlinje.* X.
OA är den givna kordan, $O(0; 0)$ är fotpunkten, $A(a; 0)$ är den

andra ändpunkten. Tangenten i A skär y-axeln i P. Den med OA parallella tangenten går genom S, som delar OP mitt itu. Genom S går då också styrlinjen, emedan S är skärningspunkten mellan två mot varandra vinkelräta tangenter. Om vidare M är mittpunkten till OA och F mittpunkten till OM, så är PM en diameter i parabeln och SF följaktligen även parallell med parabelns axel. Styrlinjen är alltså vinkelrät mot SF. Därav följer, att den sökta enveloppen är en parabel med fokus i $F\left(\frac{a}{4};\ 0\right)$ och med y-axeln som topptangent. *X.* Även löst av *L.*

576) *Att genom en given punkt draga en sekant till två givna cirklar så, att de avskurna kordorna bli lika långa.*

P är den givna punkten, C och C_1 äro cirklarnas medelpunkter, M är mittpunkten av CC_1. Uppritas cirklarnas radikalaxel samt på PM som diameter en cirkel, som skär radikalaxeln i $L(L_1)$, så är $PL(PL_1)$ den sökta sekanten. Den skär cirkeln C i Q och R samt cirkeln C_1 i S och T (från P räknat). Perpendiklarna från C och C_1 skära kordorna QR och ST i N och N_1. Nu är $CM = C_1M$; $\therefore NL = N_1L$ och $LS \cdot LT = LR \cdot LQ$.

Alltså blir $\frac{LR}{LS} = \frac{LT}{LQ} = \frac{2LN_1 - LS}{2LN - LR} = \frac{NN_1 - LS - LR}{NN_1 - LR - LS} = 1$,

d. v. s. $LR = LS$ och $NR = N_1S$ eller $RQ = ST$.

L.

577) *Lös ekvationen*

$$\sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}=(a+b)(c+x),$$

där a, b och c äro positiva. *X.*

Efter överflyttning och kvadrering fås

$$(a^2+x^2)(b^2+c^2)=(a+b)^2(c+x)^2+(b^2+x^2)(a^2+c^2)-$$
$$-2(a+b)(c+x)\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}$$

eller
$$(a^2-b^2)(c^2-x^2)=(a+b)^2(c+x)^2-$$
$$-2(a+b)(c+x)\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2},$$

varav $x_1 = -c$, som ej satisfierar

och $(a-b)(c-x)=(a+b)(c+x)-2\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}$

eller
$$ax+bc=\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2},$$

som ger $x=\frac{ab}{c}$. *C. H.*

Om a och b samt c och x äro delarna av två mot varandra vinkelräta kordor i en cirkel, erhålles den givna ekvationen enligt Ptolemeiska satsen. Enligt kordsatsen är alltså $x=\frac{ab}{c}$. *L.*

Erwin Schrödinger Werner Heisenberg

Nobelpristagare i fysik.

Vetenskapsakademien har tilldelat Werner Heisenberg det från år 1932 reserverade Nobelpriset i fysik, medan priset för 1933 delats mellan Erwin Schrödinger och P. A. M. Dirac.

Werner Heisenberg föddes i Würzburg 1901. Han blev docent i fysik i Göttingen 1924, arbetade en tid hos Niels Bohr i Köpenhamn och blev 1927 professor i Leipzig. Erwin Schrödinger föddes i Wien 1887, där han blev docent 1914. Sedan 1920 har han varit professor först i Stuttgart, så i Breslau och sedan i Zürich. 1927 efterträdde han Max Planck som professor i Berlin; för närvarande arbetar han emellertid vid universitetet i Oxford. P. A. M. Dirac slutligen är den hittills yngste Nobelpristagaren, född 1902 i Bristol. Efter studier i hemstaden, Cambridge, Köpenhamn och

Göttingen efterträdde han 1932 Joseph Larmor som professor i Cambridge.

De forskningar, som i år belönats med Nobelpris i fysik, röra sig inom samma område av den teoretiska fysiken, nämligen materiens och strålningens natur och växelverkan. För att förstå de nya teoriernas betydelse måste vi kasta en blick på det vid deras framträdande föreliggande läget inom den teoretiska fysiken. Sammanhanget kräver, att härvid åtskilligt beröres som för denna tidskrifts läsare torde vara välbekant.

Enligt den sedan länge antagna atomteorien är materien uppbyggd av ytterst små partiklar, atomer, vilka i många fall sammansluta sig till större aggregat, molekyler. I en enhetlig kemisk förening äro alla molekyler av samma slag och uppbyggda av atomer av de grundämnen, som ingå i föreningen. Enligt den särskilt av H. A. Lorentz utvecklade elektronteorien och Rutherfords och Bohrs epokgörande forskningar består varje atom av en positivt laddad kärna, mycket liten men innehållande den vida övervägande delen av atomens massa; laddningen utgör så många elementarladdningar som anges av atomens nummer i det periodiska systemet. Omkring kärnan kretsa negativt laddade elektroner, var och en med en elementarladdning. Då antalet elektroner normalt är lika med atomnumret, blir sammanlagda laddningen hos atomen noll. Elektronernas massa är c:a 1/1800 av väteatomernas.

Ljuset åter och andra strålningar av samma karaktär (ultrarött och ultraviolett ljus, röntgenstrålning, gammastrålning från radioaktiva ämnen) antog man ha karaktären av en vågrörelse i ett hypotetiskt ämne, »ljusetern», »världsetern». Denna vågrörelse, som man först tänkte sig vara av rent mekanisk natur, uppfattar man sedan Maxwells teoretiska och Hertz' experimentella arbeten på 1870—80-talen som elektromagnetiska. Denna vågteori för ljuset förklarar de interferens- och diffraktionsfenomen, man observerar hos ljuset. Fenomenen vid växelverkan mellan strålning och

materia (emission och absorption) kan vågteorien däremot ej kvantitativt förklara; för att få en med verkligheten överensstämmande formel för en absolut svart kropps värmestrålning måste Planck 1900 antaga, att ljuset utsändes i form av diskreta energibelopp, ljuskvanta, vilka till sin storlek äro lika med strålningens svängningstal gånger en konstant, Plancks konstant $h = 6{,}_{54} \cdot 10^{-27}$ ergsekund. Härmed var kvantumteorien skapad. Den utvecklades vidare

P. A. M. Dirac

och tillämpades på fotoelektriska och fotokemiska problem av Einstein 1905 och på Rutherfords atommodell av Bohr 1913; härvid ingick Plancks konstant ej endast i uttrycket för ljuskvantas storlek utan även i de regler, som bestämma, vilka av elektronernas banor kring atomkärnan som äro stabila.

Trots utomordentligt vackra resultat beträffande linje- och bandspektra, atomernas byggnad, deras växelverkan med elektroner av olika hastighet m. m., resultat, som här ej ens antydningsvis kunna rekapituleras, rådde allmänt en

viss otillfredsställelse med de formella motsägelserna dels i Bohrs atommodells förhållande till den klassiska elektrodynamiken, dels i uppfattningen av ljusets natur. Gällde det ett interferensfenomen, antog man det vara av vågkaraktär, men gällde det emissions- eller absorptionsfenomen, måste man arbeta med kvantumteorien och betrakta ljuset som bestående av ett slags partiklar, kallade *fotoner*.

Samma dualism infördes på ett nytt område av L. de Broglie 1924, som samtidigt angav vägen till dess lösning (se artiklar av E. Rudberg och H. Faxén i denna tidskrifts trettonde årgång, sid. 73 och 205). Även materien, vars partikelkaraktär på mångahanda sätt blivit så väl bevisad, skulle nämligen enligt de Broglie samtidigt vara av vågnatur; varje elektron, atom eller annan partikel i rörelse skulle samtidigt utgöras av en grupp vågor med våglängder och fortplantningsriktningar sådana, att de genom interferens praktiskt taget upphäva varandra utom inom ett litet område, och detta lilla område skulle just vara partikeln. Vågteorien för materien blev snart bekräftad med en rad interferensförsök (av Davisson och Germer m. fl.) med elektroner och atomer i rörelse.

Det är denna idé som Schrödinger nu bygger vidare på. Han ställer upp en ekvation för vågrörelsen, vilken ekvation kan lösas för vissa enkla fall, t. ex. för den endast av en vätekärna (*proton*) och elektron bestående väteatomen. Denna ekvation har endast vissa bestämda lösningar med bestämda energivärden, motsvarande de Bohrska »stationära banornas». De lagar för elektronens rörelse, som följa av Schrödingers vågekvation, kallas *vågmekanik;* denna har de vanliga mekaniska lagarna som gränsfall. Förhållandet mellan vågmekaniken och den klassiska mekaniken är analogt med förhållandet mellan den fysikaliska och den geometriska optiken; den förra har den senare till gränsfall (för oändligt korta våglängder) och framgår ur denna, då man inför vågrörelseteorien för ljuset. Även matematiskt

är övergången från klassisk till vågmekanik i hög grad analog med övergången från geometrisk till fysikalisk optik.

Heisenberg utgår i sina spekulationer från att principiellt endast sådana storheter, som direkt kunna iakttagas, skola införas i formlerna; en atomkärna och en elektron kan man ej iakttaga och kan ej heller säga något om deras relativa rörelser; vad man iakttar, det är ett antal spektrallinjer med olika våglängd och intensitet, och det är dessa, som man har att räkna med. Heisenberg insätter dessa iakttagbara storheter i ett schema, en »matrix», för vilken vissa räkneregler gälla; dessa förefalla delvis vid första påseendet egendomliga. Så gäller t. ex. ej alltid den kommutativa lagen; produkten av två storheter $p \cdot q$ är ej lika med produkten av storheterna i motsatt ordning, $q \cdot p$. Genom att tillämpa dessa räkneregler på matriserna får man så nya relationer mellan de iakttagbara storheterna. De så härledda mekaniska lagarna bilda *kvantmekaniken*; i allt väsentligt leder den till samma resultat som vågmekaniken.

En viktig följd av kvantmekaniken är den berömda »Heisenbergska osäkerhetsrelationen», som säger, att principiellt inga mätningar kunna göras med hur stor noggrannhet som helst, utan det finns en viss gräns (att vi av tekniska skäl ej på långt när kunna nå ned till denna gräns hör ej hit). Detta beror på att man ej kan observera en partikel utan att genom själva observationen påverka den och ändra dess rörelse. Vill man t. ex. i ett visst ögonblick mäta en partikels läge och rörelsemängd (massa $\times$ hastighet), så kan man visserligen uppdriva noggrannheten i lägebestämningen, men endast på bekostnad av noggrannheten i rörelsemängden; vill man ha den senare ytterst noga bestämd, så får man i stället nöja sig med ett sämre värde på den förra. Produkten av oskärpan i de båda storheterna är lika med Plancks konstant. Detta står i nära samband med Schrödingers våggrupper och dessas oskarpa begränsning. Man kan anta, att elektronerna i själva verket äro skarpt lokaliserade och att vågfunktionen i en punkt anger *sannolikhe-*

ten att påträffa en elektron där. För en fritt rörlig elektron sprider våggruppen sig alltmer under tidens lopp, vilket innebär, att den säkerhet, med vilken man kan förutsäga en elektrons framtida läge, är desto mindre ju mera avlägsen tidpunkt förutsägelsen skall gälla för. En liknande tolkning kan man göra även för ljuset; vågamplituden i en viss punkt anger sannolikheten för att en foton skall passera punkten.

Fattar man emellertid de olika begreppen elektron, atom, foton, våg m. m. alltför bokstavligt och söker åskådliga bilder av dem, stöter man på svårigheter och motsägelser; de mikrokosmiska fenomenen torde ej vara av sådan art, att de kunna inpassas i vår hävdvunna naturbeskrivning i tid och rum och med kausallagen.

De nya teorierna ha lett till ett stort antal resultat beträffande atom- och molekylspektra m. m., vilka ej här kunna beröras; här skall blott upptäckten av vätes allotropa modifikationer nämnas. Elektronen, protonen och ett antal andra atomkärnor ha nämligen ett magnetiskt moment, som man kan tolka genom antagandet att de befinna sig i rotation kring sin axel; man talar om »elektronspin» resp. »kärnspin».

I den tvåatomiga vätemolekylen kunna nu de båda atomkärnorna ej inställa sig hur som helst i förhållande till varandra, utan antingen med spinnen parallella och åt samma håll eller ock åt motsatt håll. De båda molekylslagen ha i vissa avseenden olika egenskaper och kallas *ortoväte* resp. *paraväte*; detta har experimentellt påvisats av Bonhoeffer och Harteck 1929. Vanligt väte utgör en blandning av 25 % para- och 75 % ortoväte. Vid låg temperatur har man i jämvikt nästan uteslutande paraväte; avkyler man därför vätgas i närvaro av en katalysator (t. ex. aktivt kol), som påskyndar omvandlingen mellan formerna, så får man nästan rent paraväte. I frånvaro av katalysator är denna gas praktiskt taget stabil även vid rumstemperatur.

Det återstår att beröra Diracs undersökningar. Dirac utgår

från relativitetsteorien och uppställer en teori för elektronen, vilken i många avseenden, trots olikheten i utgångspunkt, leder till samma resultat som de tyska forskarnas teorier, t. ex. beträffande elektronspinnet. Dirac räknar för övrigt, liksom Heisenberg, med tal, som ej lyda den kommutativa lagen. Ett resultat av Diracs teori är, att det utom den negativa elektronen även skall finnas en positiv med lika stor massa. Så länge man ej kände till den positiva elektronen, betraktades detta som en allvarlig svårighet för Diracs teori, men sedan man både i England och Amerika med hjälp av Wilsonkammare funnit dylika partiklar, *positroner* — ehuru mycket sparsamt förekommande — har denna svårighet bortfallit. Upptäckten av positronen innebär en lysande framgång för Diracs teori.

S. Benner.

Kalibrering av termoelement.

Av **BÖRJE SVENSSON.**

Följande metod för kalibrering av ett termoelement torde på grund av sin enkelhet lämpa sig bra för fysikundervisningen på gymnasiet. Att kalibrera ett termoelement får väl anses vara en mycket passande uppgift för en laboration eller ett enskilt arbete.

Principen för den beskrivna försöksanordningen är densamma, som användes vid Tekniska Högskolans Fysiska institution. Det karakteristiska hos metoden ligger i tillvägagångssättet att bestämma temperaturen hos det uppvärmda lödstället. För övrigt är metodiken den vanliga.

Ett för kalibrering lämpligt element är koppar-konstantan. Trådar av t. ex. 0,2 mm diameter användas. Det ena lödstället placeras i smältande is (provrör eller termosflaska), det andra i en elektrisk ugn av enkel konstruktion. Spänningen mätes med en millivoltmeter, se den schema-

tiska teckningen fig. 1. Finns ej en tillräckligt känslig voltmeter, kan spänningsmätningen ske t. ex. med en känslig galvanometer med shunt eller enligt fig. 2 medelst en enkel kompensationsanordning (motstånd, milliampèremeter, galvanometer som nollinstrument). Är t. ex. $AB =$ 1 ohm och anger ampèremetern milliampère, erhålles ju spänningen mellan A och B direkt i millivolt. Motståndet BC ändras så, att galvanometern blir strömlös.

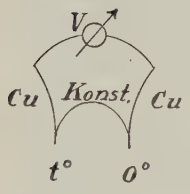


Fig. 1.

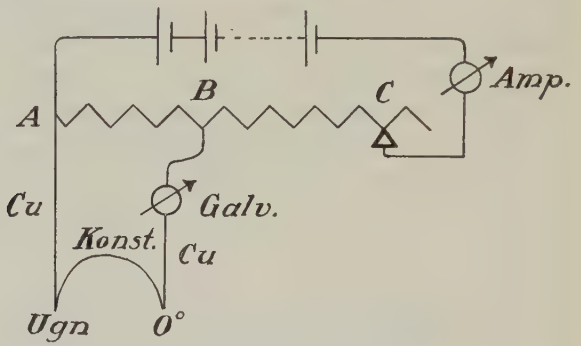


Fig. 2.

Om en elektrisk ugn ej finns att tillgå, kan en sådan för detta ändamål lätt tillverkas. Ett ugnsrör (15 cm långt och 15—20 mm inre diameter), alundumrör eller pythagorasrör (R. Grave, Stockholm), lindas med kromnickeltråd[1] (0,65 mm. diameter) speciellt avsedd för ugnar (Bergman o. Beving, Stockholm). Ugnsröret med den pålindade tråden omgives av »Homa»massa (Bergman o. Beving) och sedan därpå flera lager asbest för värmeisolering. Ugnsröret placeras lämpligen vertikalt på en täljstensplatta. Kostnaden för materialierna till ugnen belöper sig på ungefär 15—20 kr.[2]

För temperaturbestämningen användes lämpligen följande fixpunkter: kokande vatten, tenns smältpkt 231°,8 C,

[1] Tidskrift för el. Mat., Fysik, Kemi, Bd 13, sid. 232. 1929—30.

[2] Vaktmästare Tyllström, Tekniska Högskolans Fysiska Inst., mottager även beställningar å dessa ugnar. Pris kompletta cirka 25—30 kr.

blys smältpkt 327°,4 C samt zinks smältpkt 419°,4 C. Vanlig handelsvara av dessa metaller kunna användas. (Obs. lödtenn ger fullkomligt felaktiga värden på *E M K*).

Det i smältande is nedförda kontaktstället må kallas det fasta, det i ugnen placerade det fria kontaktstället.

Först placeras det fria kontaktstället (koppar och konstantantråden direkt sammanbundna med varandra) i ett provrör med vatten, som uppvärmes till kokning i ugnen. Spänningen bestämmes vid flera av varandra oberoende försök, varvid medeltalet beräknas.

Vid de tre andra temperatur- och spänningsobservationerna förbindas koppar- och konstantantrådarna hos det fria kontaktstället med en kort tråd, c:a 10 mm lång, av den ifrågavarande lättsmälta metallen. Man ser noga efter att man har rena ytor hos trådarna, ty annars kan mycket lätt felaktiga resultat erhållas på grund av otillräcklig kontakt. Kontaktstället nedföres försiktigt i ugnen, vars temperatur sakta höjes. I serie med ugnen bör kopplas ett motstånd, så att strömtillförseln kan regleras och därmed ugnens temperatur. Under temperaturhöjningen observeras spänningen, och upphettningen fortsättes, tills den korta sammanbindningstråden smälter, då maximala späningen observeras. När tråden smälter, kan det mycket lätt inträffa att koppar- och konstantantrådarna komma i kontakt med varandra och någon maximumspänning ej kan observeras. Under själva smältningsprocessen visar dock den eljest kontinuerligt stigande spänningsmätaren konstant spänning, som då motsvarar spänningen vid smälttemperaturen. För att termoelementkretsen verkligen skall brytas vid smältningen, hänger man, särskilt vid de lätt oxiderbara metallerna *Zn* och *Pb*, lämpligen en ryttare på den sammanbindande metalltråden, som då vid själva smältningen genomskäres av ryttaren. Det är mycket viktigt vid försökets utförande, att ugnstemperaturen stiger sakta, så att spänningsmätaren fullt klart hinner registrera spänningen. Två eller tre avsmältningsförsök utföras för varje metall.

För att visa hur försöksresultaten lämpligen behandlas anföres här siffror tagna ur ett protokoll över ett försök utfört vid Tekniska Högskolan.

Temp.	Elektromotorisk kraft			Medelvärde millivolt
100,0°	4,11	4,18	4,17	4,15
231,8	10,50	10,42	10,52	10,48
327,4	16,08	16,27	16,20	16,18
419,4	21,91	22,01	21,87	21,93

En kurva uppritas över sambandet mellan den elektromotoriska kraften E (ordinata) och temperaturen t (abscissa). Den erhållna kurvan blir ej rätlinjig utan kan i första approximation analytiskt uttryckas med ekv. $E = At + Bt^2$, där A och B äro konstanter. A och B beräknas ur observationsekvationerna

$$4{,}15 = A \cdot 100 + B \cdot 100^2$$
$$10{,}48 = A \cdot 231{,}8 + B \cdot 231{,}8^2$$
$$16{,}18 = A \cdot 327{,}4 + B \cdot 327{,}4^2$$
$$21{,}93 = A \cdot 419{,}4 + B \cdot 419{,}4^2$$

Rätt tillförliga medelvärden erhållas genom att addera de båda första och de båda sista ekv., då man erhåller två ekv. med två obekanta, vilket system löses på vanligt sätt. Lösningen ger $A = 3{,}70 \cdot 10^{-2}$ mV/grad; $B = 4{,}32 \cdot 10^{-5}$ mV/grad^2.

Det så kalibrerade konstantankoppar-termoelementet kan användas för temperaturmätningar inom området från $-190°$ till $+600°$C.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

8. Förtydliganden. (Forts.)

Gauss' fördelningsfunktion. Under årens lopp har jag anmodats besvara förfrågningar rörande felteorin, nämligen om övre gränsen för tillåtna fel och vad som förstås med medelfelet i medelvärdet. Vid studiet av medicinsk, psykologisk eller pedagogisk litteratur ha vederbörande stött på benämningarna korrelation och matematisk statistik samt önskat upplysning om innebörden av dessa begrepp. De, som idka universitetsstudier i statistik, sakna stundom matematiska förutsättningar för ett djupare inträngande i sanolikhetskalkylen. Vid universiteten tillhör statistiken den humanistiska sektionens ämneskrets. Även matematiklärare torde ha gagn av en kortfattad orientering i ämnet. Mina uppsatser hava tillkommit för att tillgodose dessa behov, men ingalunda för att tjänstgöra som lärobok å gymnasiet.

Den av lektor PETRINI och läroboksförfattarna föreslagna skolkursen i sannolikhetsräkning är icke i stånd att besvara ovannämnda spörsmål. Denna kurs lämpar sig knappast som utgångspunkt för ändamålet. För den unge vore det, såsom också framhålles av läroverkslärare, otvivelaktigt av större gagn att å gymnasium få någon inblick i integralkalkylen. Av personer i medelåldern eller äldre har jag vid ett par tillfällen anmodats att ge en förklaring av det mystiska integraltecknet. Detta begrepp behöver komma in i medvetandet vid unga år för att kunna smältas.

I det föregående har felkurvan antagits vara given av erfarenheten och i allmänhet återge felfördelningen. För att vinna en utjämning är det ej ovanligt, att man av utseendet av en empiriskt given kurva söker att om möjligt erhålla ett analytiskt uttryck för kurvan. I detta fall visar det sig, att en påtaglig egenskap hos längden av felkurvans subtangent enklast kan återges genom funktionen $\frac{a}{x}$. Den kritik lektor Petrini riktar mot tillvägagångssättet tar jag med jämnmod, då jag följt ett lysande föredöme från ett närbesläktat område. I sin senare framställning (åren 1821—23 och 1826) av minsta kvadratmetoden,[1] vilken är oberoende av formen för fördelningsfunktionen, medger Gauss öppet, att det är omöjligt att utan någon hypotes lösa problemet och uttalar därjämte, att då man kunde välja mellan flera hypoteser, den enklaste vore den bästa.

För övrigt ligger det nära till hands att studera, hur subtangenten varierar. Antages att längden av subtangenten i en punkt med abskissan x är en bekant funktion lika med $s(x)$, så bestämmes kurvan $y = f(x)$ genom differentialekvationen

$$s(x) \cdot f'(x) = f(x). \tag{4}$$

Vid felkurvan går $s(x)$ mot ∞, då x går mot 0, och vidare går $s(x)$ mot 0, då x går mot ∞.

Lektor Petrini gör följande uttalande om mitt förfaringssätt: »Nu gäller det för *alla* kurvor, som skära y-axeln vinkelrätt, att subtangenten närmar sig ∞, då x närmar sig 0, och härav följer naturligen, att subtangenten avtar i närheten av nollpunkten. Hela resonemanget är således värdelöst» samt tillägger »på sin höjd kan det tjäna som varning för läraren att inlåta sig på en alltför ytlig hevristik vid undervisningen».

Första delen av detta uttalande är obegriplig. Å ena sidan säges att subtangenten går mot ∞, när x går mot 0

[1] Se F. W. Hultman, Minsta qvadratmetoden, Stockholm 1860.

hos alla kurvor, som skära y-axeln vinkelrätt. Av (4) framgår, att detta är sant om $f(0) \neq 0$. Men om $f(0) = 0$, är påståendet i allmänhet oriktigt. Exempelvis skär kurvan $2py = x^2$ y-axeln vinkelrätt, men $s(x) = \frac{x}{2}$ och växer med x från 0 till ∞. Å andra sidan är uttrycket »härav följer naturligen, att subtangenten avtar i närheten av nollpunkten» orimligt, då i samma mening talas om att den går mot ∞, då x går mot 0. Om meningen är att $s(x)$ tenderar mot 0, då x går mot ∞, är detta i allmänhet oriktigt. Om $f(x) \neq 0$, men $f'(x)$ närmar sig 0, då x går mot ∞, går $s(x)$ även mot ∞. Om $f(x)$ och $f'(x)$ båda närma sig 0 vid växande x, vilket här är fallet, är det tänkbart att $s(x)$ går mot 0. Vid växande x kan $s(x)$ antaga vilket gränsvärde som helst. För övrigt hänvisas till halvcirkeln (årg. 14, sid. 7) och till parablar av olika ordning (Norsk matematisk tidsskrift, årg. 14, en i det följande anförd uppsats).

Även om man ser bort från kurvor, som gå genom origo, och anser min invändning i den delen betydelselös, så vittnar vad i övrigt anförts, att lektor PETRINI icke har fullt satt sig in i dessa enkla saker. Hans omdöme om min framställning: »Hela resonnemanget är således värdelöst» tager jag mig friheten att tournera mot hans kritik av densamma. Han tar jämväl miste, då han tror, att jag strävat efter en hevristisk framställning. Hans förkastelsedom drabbar alla de fall, då man av en kurvas utseende lyckas finna en plausibel form för dess ekvation. I det föreliggande exemplet äro subtangentens angivna egenskaper karakteristiska för klockkurvan. Genom integrering kommer man omedelbart fram till klockkurvan med dess parameter (precisionen). Genom att åt den sistnämnda ge olika värden får man fram en oändlig mängd olika variationer av kurvan i fråga från de mest hoptryckta till de mest tillplattade (se den förträffliga fig. 21 i HEDSTRÖM-RENDAHLS Algebra A, Stockholm 1931, vilken synes vara hämtad från v. MISES).

Det är klart, att det för matematikern skall synas likställt med ett helgerån, att man företar sig att hoppa över alla lärda deduktioner och antager felkurvan vara funnen genom erfarenheten samt tillämpar ett inom statistiken vanligt förfaringssätt för att finna ekvationen för den på empirisk väg funna kurvan. Men redan i den första av dessa uppsatser (årg. 13, sid. 198) anfördes ett uttalande, att åtskilliga matematici luta åt den meningen att varje försök att bevisa GAUSS' lag är angripbart. Detta anses ligga i sakens natur, så länge man formulerar lagen genom den bekanta exponentialfunktionen. Här ovan har anförts, att Poissons framställning kritiserats, därför att beviset för fördelningslagen grundar sig på likamöjlighetsantagandet, samtidigt som han uttalar, att existensen av ett relativt frekvenstal vid ett tillräckligt upprepat försök, utgör den egentliga grundvalen för sannolikhetsräkning. VIGGO BRUN har i ett speciellt fall ersatt exponentialfunktionen med en definit integral och därmed lämnat en från matematisk synpunkt oantastbar framställning av fördelningslagen.[1] Vidare har han visat att denna integral approximativt kan ersättas med exponentialfunktionen.

Den, som för praktiskt bruk behöver sannolikhetsräkning, har i allmänhet icke tillfälle att gå in på dessa subtila saker. Han är tillfredsställd, om han av kurvans utseende lyckas skaffa sig ett analytiskt uttryck, som genom prövning befinnes nöjaktigt ansluta sig till den empiriskt funna kurvan.

Lektor PETRINI säger sig i mina uppsatser hava förgäves sökt finna en i åskådlig bild gjord framställning av de stora talens lag. I själva verket har jag (årg. 14, sid. 7) föreslagit, att man skulle skaffa sig en bild av klockkurvan från laborationsförsök eller från lämpligt statistiskt material. Att anföra exempel skulle i alltför hög grad hava inkräktat på tidskriftens utrymme, vilket jag tack vare redaktionens välvilja allt för mycket har tagit i anspråk. I mitt arbete

[1] GAUSS' fordelningslov, Norsk matematisk tidsskrift, 14 årg., 1932.

citeras på olika ställen läroböcker i statistik av fyra författare bland dem också professor CHARLIER, som särskilt anföres av PETRINI.[1] Hos alla finnas exempel på frekvenskurvor, där snedheten och excessen äro mycket små och vilka därför hava normal fördelning. Samtliga anförda författare till läroböcker i statistik förutsätta, att läsaren är förtrogen med GAUSS' felkurva, bernoulliska medelvärdet, bernoulliska spridningen m. m. Mitt syfte var bland annat att visa, hur man utan en alltför lärd apparat kunde komma fram till analytiska uttryck för angivna storheter (årg. 13, sid. 199 ff. samt årg. 15, sid. 67 ff.).

Genom det anförda citatet har lektor PETRINI visat, att han ej gjort fullt klart för sig, vad saken gäller. De åsyftade tre exemplen från CHARLIER avse gossefödsel, graviditetsperioden för kor och antalet svarta kort dragna ur en kortlek. PETRINI synes icke hava tänkt på att beskaffenheten av det fenomen, varom saken rör sig, säkerligen har större inflytande på frekvenskurvans beskaffenhet än antalet element, om detta i och för sig är stort nog. Också uttalar CHARLIER i sista stycket av anförda kapitel, att ju flera element den statistiska serien omfattar, desto regelbundnare är avvikelsen från normalformen och särskilt gäller detta, om man har anledning förmoda att fenomenet i fråga följer den enkla bernoulliska lagen, vilket är fallet med den exempelvis anförda serien dragningar av svarta kort ur en kortlek. Å sid. 26 anmärker CHARLIER att detta i och för sig enkla experiment är mödosamt nog, om det skall vara tillräckligt omfattande.

Mera givande och mindre tidsödande torde vara att för nybörjaren åskådliggöra de vid det bernoulliska problemet föreliggande förhållandena medelst en apparat, som i sin enklaste form benämnes GALTONS bräde (fig. 15).

Punkterna i figuren angiva piggar. Avståndet mellan två piggar är såväl i horisontal som vertikal led 2 längd-

[1] Förmodligen avses kap. X, die normale Frequenzkurve, sid. 61—67 i 1931 års upplaga.

enheter och avståndet mellan raderna är 1 längdenhet. Det är likgiltigt om antalet piggar i de särskilda raderna göres större än i figuren angives. Åt brädet ges en svag lutning. Tratten innehåller stålkulor med en diameter av ej fullt 2 längdenheter. Den nedre delen av brädet är försedd med rännor, vilkas bredd är 2 längdenheter, avsedda att uppsamla kulorna och anordnade symmetriskt på sätt figuren angiver. En kula, som träffar den första piggen, avviker till höger eller vänster, och när den genomlöpt samtliga n rader, faller den ned i en ränna. Sannolikheten för en kula att falla till höger eller vänster om en pigg är $p = q = \frac{1}{2}$. Antag att mittpunktens abskissa är 0. Abskissorna för rännornas mittpunkter äro

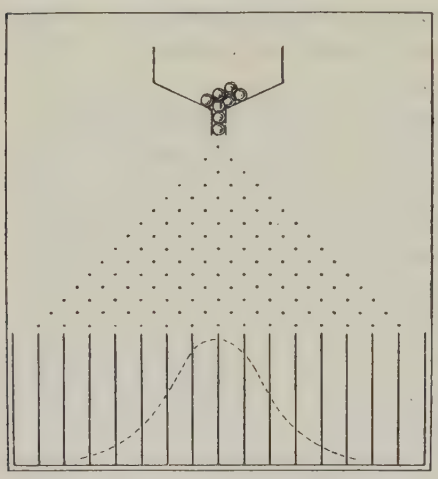


Fig. 15. Galtons bräde.

$$-n, -n+2, -n+4, \ldots n-4, n-2, n.$$

Sannolikheten för att en kula slutligen hamnar i en ränna med abskissan x är, att avvikelsen i positiv riktning har inträffat $\frac{1}{2}(n+x)$ gånger och i negativ riktning $\frac{1}{2}(n-x)$ gånger. Sättes

$$y = \frac{n+x}{2},$$

är sannolikheten för att kulan skall stanna i rännan i fråga i analogi med formeln (4), årg. 15, sid. 68

$$w_n(y) = \binom{n}{y} p^{n-y} q^y = \binom{n}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Den i fig. 15 återgivna apparaten torde innehålla för litet antal stift. I en verklig apparat var antalet stift i nedersta raden 40 och avståndet mellan stiften 8 mm.

Anordningen har sedermera fullkomnats[1] av KARL PEARSON, så att den kan användas för ett godtyckligt värde på förhållandet $p : q$.

S. k. paradoxala uppgifter. Lektor PETRINI har ansett lämpligt att i gymnasiets ring I[4] bestämma π medelst det s. k. buffonska nålproblemet. Om man på ett papper, å vilket äro uppritade parallella linjer på lika avstånd, kastar en nål, som är kortare än avståndet mellan linjerna, kommer denna att i vissa fall träffa en linje, i andra fall att ligga mellan två linjer. Den sannolikhetsteori, som a priori, instinktivt eller på liknande sätt anser alla kast vara likvärdiga, kommer här ohjälpligt till korta, då det visar sig, att man vid olika val av koordinatsystem erhåller olika värden på sannolikheten för att nålen skall råka någon av de parallella linjerna.

Den, som går ut från att nålens läge i förhållande till de parallella linjerna bestämmes genom abskissorna för dess ändpunkter (årg. 15, sid. 134), anser förmodligen, att sannolikheten $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a}$. Den, som använder som koordinater abskissan för mittpunkten och nålens lutning mot x-axeln, finner $W = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{a}$ vara det riktiga värdet. Vid annat val av koordinater får man andra värden. Enligt den subjektiva sannolikhetspricipen äro alla lika riktiga. Lektor PETRINI förklarar kategoriskt, att det ena värdet är riktigt, men att det andra är oriktigt utan att anföra något skäl för sin mening eller angiva vilketdera som är riktigt.

Enligt det empiriska betraktelsesättet åter gäller formeln (2) sid. 133, årg. 15

[1] Se YULE, det förut anförda arbetet, vari beskrivning lämnas på The PEARSON-GALTON binomial apparatus.

$$W = \iint_{(F_1)} w(x, \vartheta)\, dx\, d\vartheta$$

eller motsvarande fullt generellt. Sannolikhetstätheten w bestämmes experimentellt. Det är självklart, att funktionen w får olika utseende vid olika val av koordinater. Om man kan ådagalägga, att w är konstant vid ett visst val av koordinatsystem, är den i allmänhet icke konstant vid ett annat val av koordinater. Detta kan utrönas genom koordinattransformation, såsom lektor PETRINI mycket riktigt anmärker. Men därmed bevisas ock att den subjektiva uppfattningen icke går i land med att reda ut saken, eftersom man icke utan experiment kan avgöra, huruvida något av de erhållna värdena är riktigt. Självklart är, att sannolikheten W, för att nålen skall träffa någon av de parallella linjerna, är densamma, hur man än väljer koordinatsystemet. Uppgiften är, såsom tidigare anmärkts, oduglig för gymnasiet.

Med anledning av ett uttalande i sista stycket av lektor PETRINIS uppsats i junihäftet tillåter jag mig framhålla, att jag ingalunda på »ett något lättfärdigt sätt» avfärdat hans hänvisning till probabilitetskalkylens betydelse för den teoretiska fysiken. Vad jag velat betona är, att den föreslagna kursen i sannolikhetsräkning är utan betydelse för skolans fysikundervisning (årg. 15, sid. 9 och 74). Utan ökning av matematikkursen kan man i den naturvetenskapliga undervisningen ingjuta det betraktelsesätt, att man skaffar sig kännedom om sanningen genom ett statistiskt uppsamlande av fenomenen. Det sannolikhetsbegrepp, som därigenom bibringas ungdomen, är det empiriska och icke det subjektiva, vilket har okunnighet om förhållandena till utgångspunkt.

Några iakttagelser om pytagoreiska trianglar.

Av NAT. BECKMAN.

Sedan många år har förf. den ovanan att på lediga stunder syssla med huvudräkningsuppgifter. Endast mera sällan ge dessa resultat, som kunna antagas vara någon medmänniska till någon nytta. Men då jag räknat på s. k. pytagoreiska trianglar och deras sammanställande till trianglar med enkla heltalsförhållanden mellan samtliga sidor och höjder (rationella trianglar), så ha några saker kommit fram, som ehuru säkerligen ingalunda nya dock kanske icke alltid äro aktuella för de lärare, som syssla med finnandet av övningsexempel, därvid det ju kan vara nyttigt att icke genom en allt för stor numerisk apparat skymma den huvudsak, man vill inöva. Må därför djärvheten att framlägga mina små räkneresultat icke illa upptagas av kunnigare kolleger på lärarebanan.

Formeln för de tre sidorna i en pytagoreisk triangel är ju:

$$2ab,\ a^2 - b^2,\ a^2 + b^2. \tag{1}$$

Här, såsom över allt i det följande, förutsättas bokstäverna a, b, c, som uttrycka det givna, beteckna hela positiva tal. För att triangeln skall bli »primtalstriangel», alltså dess sidor sinsemellan vara primtal, är ett nödvändigt villkor, att a och b äro sinsemellan primtal. Förutsättningen är också tillräcklig utom i det fall, att både a och b äro udda tal, då samtliga sidor bli delbara med 2. För detta fall få vi formeln

$$ab,\ \frac{a^2 - b^2}{2},\ \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{2}$$

Då naturligtvis ingenting hindrar, att b (det mindre talet) antager värdet 1, så finna vi, att enligt (2) en pytagoreisk primtalstriangel kan konstrueras med vilket udda tal som helst till given katet. Av (1) se vi åter, att jämna tal, som icke äro delbara med 4, icke ge någon primtalstriangel, medan åter en sådan kan uträknas till varje tal, som är delbart med 4. Om k är den givna kateten, så uppställer man endera av de diofantiska ekvationerna $k = ab$, resp. $k = 2ab$. Alla de heltalslösningar, som den i varje särskilt fall använda ekvationen ger, giva pytagoreiska trianglar.

Då det naturligtvis är önskligt att ha en gemensam formel för alla förekommande fall, kan formel (1) användas som sådan, blott man har i minne, att division med 2 för vissa fall blir nödvändig.

Med avseende på ingående konstanters delbarhet med talseriens första tal gälla ett par intressanta regler:

2) perimetern (2 p) är alltid ett jämnt tal. Se f. ö. vid 4).

3) en katet är alltid delbar med 3, den andra kateten och hypotenusan däremot aldrig.

4) en katet är alltid delbar med 4, den andra kateten och hypotenusan äro däremot alltid udda tal.

5) En sida (katet eller hypotenusa) är alltid delbar med 5.

6) Arean är alltid delbar med 6.

Bevismetoden, som är mycket enkel, skola vi exemplifiera med regeln för 5, vilken för övrigt blir den, som får mest intresse i det följande.

Med avseende på sin delbarhet med 5 kunna talen indelas i tre grupper:

0-gruppen	med formen	$5x$;	kvadrat $25x^2$
1-gruppen	»	$5x \pm 1$;	» $25x^2 \pm 10x + 1$
2-gruppen	»	$5x \pm 2$;	» $25x^2 \pm 20x + 4$.

På det fallet, att den givna kateten är delbar med 5, d. v. s. tillhör *0*-gruppen, behöva vi ju icke spilla ord. Vi kunna därför tillåta oss en förkortning i uttrycket och här i denna uppsats beteckna två tal, av vilka det ena tillhör *1*-gruppen,

det andra 2-gruppen såsom tillhörande »motsatta grupper». Men en blick på vår uppställning härovan visar omedelbart, att om vi välja a och b så, att antingen båda tillhöra 1-gruppen eller båda 2-gruppen, så blir den funna andra kateten, $(a^2 - b^2)$, delbar med 5. Om vi åter välja a och b så, att de tillhöra var sin av dessa två grupper, så blir hypotenusan $(a^2 + b^2)$ delbar med 5.

Femdeliga hypotenusor skola göra oss tjänster i det följande. För deras behandling blir det nödvändigt att här ge bevis för några enkla satser angående 1-gruppen och 2-gruppen.

A. Produkten av två tal, som tillhöra samma grupp, tillhör alltid 1-gruppen.

Antag först, att båda talen tillhöra 2-gruppen. Vi få då $5x \pm 2)(5y \pm 2) = 25xy \pm 10x \pm 10y \pm 4$.

Detta uttryck kan tydligen skrivas under formeln $5z \pm 1$.

Om båda talen tillhöra 1-gruppen, sker beviset på samma sätt.

B. Ett viktigt specialfall av denna sats är, att kvadraten på såväl 1-gruppens som 2-gruppens tal alltid tillhör 1-gruppen. (En jämn kvadrat, som icke slutar på 5 eller 0, slutar antingen på 1, 4, 6 eller 9.)

C. Produkten av två tal, som tillhöra motsatta grupper, tillhör alltid 2-gruppen.

Bevismetoden framgår omedelbart av det föregående.

D. Summan av kvadraterna på två tal, som tillhöra motsatta grupper, är alltid delbar med 5.

E. Det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att hypotenusan $a^2 + b^2$ skall bli delbar med 5, är alltså, att ab tillhör 2-gruppen, alltså att a och b tillhöra motsatta grupper.

F. Udda tal, som tillhöra 2-gruppen, måste sluta på antingen 3 eller 7. Fyrdeliga tal, vilkas hälfter tillhöra 2-gruppen, måste sluta antingen på 4 eller 6. Alla udda tal, som sluta på 3 eller 7, samt alla 4-deliga tal, som sluta på 4 eller 6, lämna sålunda pytagoreiska trianglar med 5-delig hypotenusa. Av förra slaget finnas 2, av det senare 1 på varje

tiotal inom talserien. I det hela finnas sålunda 3 tal på varje tiotal i talserien, som satisfiera vårt villkor.

Förestående sats om 5-deliga hypotenusor får en lätt ihågkommen form, om vi uttrycka den så, att 5-deliga hypotenusor lätt fås ur de utgångstal, som ligga närmast de med 5 men icke med tio delbara talen, de tal, som ligga närmast ett tal, som slutar på 5. Detta gäller både de udda och de fyrdeliga utgångstalen. Brukbara ur nu ifrågavarande synpunkt äro talen 3, 4, 7, 13, 16, 17, 23, 24, 27, 33, 36, 37 o. s. v.

* *
*

För att vara lämplig och trevlig som skolexempel måste ju en triangel inte bara ha den egenskapen att vara numeriskt lagom svår att beräkna, den bör också ha sådana geometriska egenskaper, att den kan ritas upp inom en lämplig yta. Problemet är nu att finna en sådan. Radikalast löses detta problem genom att vi söka en triangel, som är tillnärmelsevis likformig med en given triangel. En rätvinklig triangel är ju entydigt bestämd, om en av de trigonometriska funktionerna för en av dess spetsiga vinklar har ett givet värde. Jag skall här först ge ett par exempel, som inbjuda till rent algebraisk behandling. Ehuru jag förnummit, att för en matematiker av facket trevliga problem uppställa sig, om man går något lärdare vägar, håller jag mig till det strängt elementära behandlingssätt, som betingas av mina förutsättningar och uppsatsens anspråkslösa mål.[1]

[1] Om hithörande frågor språkade jag ofta med min nu avlidne vän Arvid Lindhagen, L. har ju också själv i denna tidskrift (Årg. *3*, sid. 3) behandlat ett mycket närliggande problem. Emellertid syntes mig den skillnaden råda, att L. sökte en behandling, som var talteoretiskt tillfredsställande därutinnan, att man kunde visa, att problemet i hans skarpa formulering hade ett begränsat antal lösningar, medan för mitt syfte (ett urval som skolexempel bekväma trianglar) med fördel kunde utnyttjas lösningar, som voro uteslutna med Lindhagens skarpa formulering. — Mina anspråkslösa syften skulle ibland till och med kunna tjänas genom ännu grövre approximationer, som erhållas, om $\frac{a}{b}$, $\sqrt{2}$ etc. sökas med hjälp av en räknesticka.

Problem 1. Sök de pytagoreiska trianglar, som äro tillnärmelsevis likbenta.

Lösningen vinnes naturligtvis lättast ur $a^2 - b^2 = 2ab$, som ger

$$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}.$$

Den negativa roten förkastas.

Om man nu utvecklar sistnämnda tal i kedjebråk, så erhåller man en serie värden, som konvergera mot det exakta värdet på $\frac{a}{b}$. De erhållna värdena kunna alltid användas, då de enligt reglerna för kedjebråk äro sins emellan primtal. Värdena bli:

$\frac{2}{1}$, som ger 4, 3, 5

$\frac{5}{2}$, » » 20, 21, 29

$\frac{12}{5}$, » » 120, 119, 169

$\frac{29}{12}$, » » 696, 697, 985

$\frac{70}{29}$, » » 4060, 4059, 5741.

Om man prövar resultaten genom att beräkna de spetsiga vinklarna i dessa trianglar, så finner man, att vi redan med de få här upptagna konvergenterna kommit inom mindre än en minut från den vinkel på 45°, som förutsättes för den exakta lösningen.

Problem 2. Sök de pytagoreiska trianglar, som tillnärmelsevis sammanfalla med halva den liksidiga triangeln. (Minsta vinkeln 30°.)

Här te sig två metoder som lika rekommendabla. Man kan först sätta $a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)$, som ger $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

Detta kan, då man vill ha många konvergenter att välja emellan, utvecklas i kedjebråk på det enkla sättet, att man i en tabell uppsöker ett närmevärde i decimalbråk på $\sqrt{3}$ och sedan utvecklar detta i ett kedjebråk genom en serie divisioner. På denna väg får man följande konvergenttrianglar:

$\frac{1}{1}$	förkastas.							
$\frac{2}{1}$	som	ger	4,	3,	5.	Minsta	vinkel	36°,9
$\frac{5}{3}$	»	»	15,	8,	17.	»	»	28°,1
$\frac{7}{4}$	»	»	56,	33,	65.	»	»	30°,5
$\frac{19}{11}$	»	»	209,	120,	241.	»	»	29°,9.

En vida elegantare och snabbare konvergens får man genom omedelbar utveckling i kedjebråk med negativa termer, enligt formeln

$$\sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 \ldots}}.$$

Konvergenterna bli nu $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}$.

Redan med den fjärde konvergenten, som ger 10864, 6273, 12545, ha vi nått gränsen för den fyrställiga skoltabellens kapacitet.

Ett annat sätt att lösa vårt problem är naturligtvis att sätta $a^2 + b^2 = 4ab$, som, om a antages vara det större talet, ger $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$.

Om den skolpojksmässigt elementära kedjebråksutvecklingen, med användande av tabellernas numeriska närme-

värden på ingående kvadratrötter här kan te sig onödig, så kan den bli nödvändig, om den triangel, vi ta till utgångspunkt, är bestämd icke genom ett enkelt talförhållande utan genom en vinkel, vars trigonometriska funktioner äro irrationella tal. Även för detta fall få vi ganska enkla räkningar. Vi gå till

Problem 3. Sök den pytagoreiska triangel, vars ena spetsiga vinkel är V.

Ur $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \sin V$ fås $\frac{a}{b} = \frac{\cos V}{1 - \sin V} = \frac{1 + \sin V}{\cos V}$.

Här har man väl ingen annan elementär väg att gå än den, att man i en tabell uppsöker numeriska värden på cos V och sin V och sedan verkställer räkningen genom en serie divisioner, som ge ett kedjebråk. Rätt roande exempel kan man få, om man »förstämmer» de enkla relationer, vi förut räknat med, sålunda t. ex. undersöker, hur länge konvergenterna för 29° eller 44° följa de förut för resp. 30° och 45° uppvisade serierna.

* *
*

Att rationella, snedvinkliga trianglar ha ett visst värde genom att avlasta arbete från den numeriska uträkningen och frigöra energi för principiella frågor, synes mig antagligt. Om jag t. ex. som första exempel till Herons formel väljer triangeln 17, 65, 80, resp. 13, 40, 45, så finna lärjungarna under rotmärket i formeln endast jämna kvadrater, som mig synes ett gott stöd för minnet, låt vara, att de snart få erfara, att dylika kungsvägar äro sällsynta i geometrien. Tar man som andra exempel 8, 29, 35, så blir svårigheten endast en liten nyans större.

En rationell, snedvinklig triangel erhålles lämpligast därigenom, att man sammansätter två pytagoreiska trianglar. Till gemensam katet väljes ett tal, som är delbart på två sätt, t ex. $2ab = 2cd$. Härur erhållas två trianglar, $2ab$, $a^2 - b^2$. $a^2 + b^2$ och $2cd$, $c^2 - d^2$, $c^2 + d^2$. Man sammanställer dessa

så, att de båda lika kateterna $2ab$ och $2cd$ bli gemensam höjd i den sökta triangeln. Basen i denna kan få två värden:

a) Om man sätter kateterna $a^2 - b^2$ och $c^2 - d^2$ åt motsatt håll, blir basen

$$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) = (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2). \quad (3)$$

Denna triangel kalla vi plustriangeln.

b) Om nämnda kateter sättas åt samma håll, blir basen

$$(a^2 - b^2) - (c^2 - d^2) = (a^2 - c^2) - (b^2 - d^2). \quad (4)$$

Denna triangel kalla vi minustriangeln.

Även för dessa trianglar gälla vissa delbarhetsregler:

Omedelbart inses, att de genom sammanställning vunna trianglarnas ytor liksom deltrianglarnas måste vara delbara med 6. Viktigare är, att omkretsen $2P$ alltid måste vara delbar med 2 och alltså $P(P-a)\ (P-b)\ (P-c)$ ett helt tal. Ty om $2P_1$ och $2P_2$ äro omkretsar i resp. plus- och minustrianglarna, $2p_1$ och $2p_2$ omkretsar i resp. den större och den mindre deltriangeln, h den sammansatta triangelns höjd (den gemensamma kateten) och b_1 den mindre deltriangelns bas, så inses att

$$2P_1 = 2p_1 + 2p_2 - 2h \quad \text{och} \quad 2P_2 = 2p_1 + 2p_2 - 2h - 2b_1.$$

Båda uttrycken måste tydligen beteckna hela jämna tal.

Dessutom gäller en intressant 5-talsregel:

Om båda hypotenusorna i deltrianglarna äro delbara med 5, så är även basen delbar med 5 antingen i plustriangeln eller i minustriangeln.

Beviset är för det ovan förutsatta fallet ganska enkelt. Om $a^2 + b^2$ skall vara delbart med 5, så måste a och b tillhöra »motsatta grupper». Samma sats gäller för c och d. Nu äro två fall möjliga:

A. Antingen tillhöra a och c samma grupp. Om så är, måste också b och d båda tillhöra den andra gruppen och sålunda sinsemellan samma grupp. I detta fall komma enligt vad vi ovan visat, båda parenteserna i det senare uttrycket för minustriangelns bas att bli delbara med 5.

B. Eller ock tillhöra a och c motsatta grupper. I så fall måste dels d tillhöra samma grupp som a, dels b samma grupp som c, vadan b och d liksom a och c tillhöra motsatta grupper. Här bli båda parenteserna i det senare uttrycket för plustriangelns bas delbara med 5.

Vi ha hittills uteslutande sysslat med primtalstringlar. Trianglar, vilkas sidor ha en faktor gemensam, utgöra ju multipler av de trianglar, som erhållas, om vi utdividera den gemensamma faktorn. Vi kalla dem för enkelhetens skull multipeltrianglar. Multipeltrianglarna ha ju i övrigt samma egenskaper som de primtalstrianglar, varav de uppkommit. Särskilt ha de för vår nu föreliggande uppgift samma värde som dessa. Man utgår från två dylika med kateterna $2ab$ resp. $2cd$ och väljer m och n så, att $2mab = 2ncd$, varefter trianglarna sammanfogas såsom ovan. Vi vilja nu förutsätta, att ab och cd valts så, att hypotenusorna bli delbara med 5. Ur primtalstrianglarna 3, 4, 5 och 7, 24, 25 erhållas t. ex. multipeltrianglarna 21, 28, 35 och 21, 72, 75, vilka sammansättas.

Även för multipeltrianglar gäller den ovan framställda 5-talsregeln. Beviset blir något vidlyftigare än för primtalstrianglarna.

Både a^2 och b^2 måste enligt B tillhöra *1*-gruppen, kunna skrivas under formen $5x \pm 1$.

Sak samma gäller c^2 och d^2. Men då summorna äro delbara med 5, måste tecknen framför 1 vara motsatta. Därav följer, att såväl $a^2 - b^2$ som $c^2 - d^2$ kunna skrivas under formen $5x \pm 2$.

Då vidare både $2ab$ och $2cd$ måste tillhöra samma grupp, så måste, om produkterna $2mab$ och $2ncd$ skola kunna vara lika (alltså tillhöra samma grupp) m och n även sinsemellan tillhöra samma grupp, alltså antingen båda ha formen $5y \pm 1$ eller $5y \pm 2$. Utför man nu multiplikationerna, så finner man, att bassegmenten få antingen båda formen $5z \pm 2$ eller båda $5z \pm 4$. I båda fallen måste de icke 5-deliga termerna

tydligen taga ut varandra antingen vid addition eller vid subtraktion.

I själva verket kan man gå längre. Basen måste från början kunna delas med 25. Ty efter division med 5 äro samtliga sidor hela tal; höjden däremot ett bråk med nämnaren 5. Enligt regeln om 2 s. 8 få vi under rotmärket i Herons formel ett helt tal; kvadratroten ur ett sådant kan väl vara ett irrationellt tal men icke ett exakt bråk. Ett irrationellt tal kommer ju i detta fall icke i fråga, arean måste alltså vara ett helt tal. Då nu efter divisionen höjden har formen $\frac{x}{5}$, så måste basen ha formen $5y$.[1]

Med användande av den andra 5-talsregeln får man ett betydande tillskott till de numeriskt bekväma trianglar, som på annat sätt kunnat fås. Vi uppställa en liten tabell:

Utgångstal	Trianglar
16	4, 13, 15
24	5, 29, 30
27	9, 73, 80
33	11, 13, 20
36	9, 10, 17
	17, 65, 80
	12, 17, 25
	12, 55, 65
	9, 65, 70
44	11, 25, 30
56	13, 14, 15
	13, 40, 45
57	19, 20, 37

Här ha vi tills vidare endast använt sådana utgångstal, som åt ett håll minst giva primtalstrianglar (2-gruppens tal). Man kan emellertid använda tal, som utgöra minsta gemensamma dividend till tvenne tal med de önskade egenskaperna.

[1] Ett genetiskt bevis för denna sats, ett bevis, som visar h u r basen antar den nämnda formen, torde en kunnigare läsare kunna prestera.

Vi få då en ny tabell:

Utgångstal	Trianglar
21	7, 15, 20
28	7, 15, 20
39	13, 40, 51
48	10, 35, 39
	16, 25, 39
51	17, 87, 100

Det torde överraska en eller annan läsare, att man från ett så pass stort utgångstal som 252 kan komma till en så enkel triangel som 5, 51, 52.

Det bör kanske anmärkas, att om man använder en multipel av triangeln 3, 4, 5, så erhålles oftas en förut bekant triangel. Om vi nämligen tänka oss en höjd dragen mot den femdeliga sidan, så måste denna vara 0,8 eller 0,6 gånger en av de andra sidorna. Om vi då kalla denna sida c, den femdeliga sidan $5x$ och till en början räkna med $0{,}6c$ som höjd, så få vi som uttryck för arean:

$$A = 1{,}5\ cx.$$

Om vi nu åter tänka oss en höjd z, fälld mot c, så gäller ju också

$$A = \frac{cz}{2}; \quad 1{,}5\,cx = \frac{cz}{2}; \quad z = 3x.$$

Men $3x$ är enligt våra förutsättningar ett helt tal. Triangeln kan sålunda härledas ur ett helt tal utan tillämpning av 5-talsregeln. Om vi hade räknat med $0{,}8c$, så hade räkningen gestaltat sig på samma sätt. Den triangel, som ovan med 5-talsregeln härletts ur talet 33, kan utan denna härledas ur talet 12.

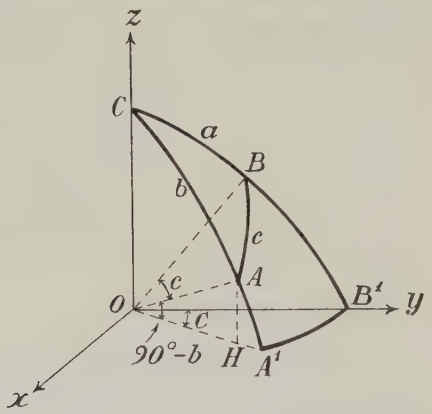
Det anspråkslösa syftet med denna uppsats torde vara uppnått. Det torde ha framgått, att en lärare, som funderar över exempel till Herons formel, med mycket ringa möda kan finna massor av dylika exempel, så enkla, att deras lösning utan större besvär kan verkställas i huvudet.

Sfäriska trigonometriens grundformler.

Av STURE NYDELL.

Begreppen riktningsvinkel och riktningscosinus anses bekanta.

Vi införa ett rätvinkligt koordinatsystem enligt vidstående figur med origo i enhetssfärens medelpunkt samt yz-planet lagt genom hörnen B och C i en given sfärisk triangel ABC, så att z-axeln går genom punkten C.



För linjen OB bli, om riktningsvinklarna betecknas med α, β och γ,

$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ - a \text{ och } \gamma = a.$$

Riktningscosinerna för OB bli sålunda

$$\cos\alpha = 0,\ \cos\beta = \sin a \text{ och } \cos\gamma = \cos a.$$

Som lätt inses, äro riktningscosinerna för en linje lika med koordinaterna för den punkt, där linjen skär enhetssfären.

Emedan $\angle AOA' = 90° - b$, bli koordinaterna för punkten A (AH är en normal mot xy-planet)

$$\begin{aligned} z &= \sin(90° - b) = \cos b, \\ y &= OH \cos C = \sin b \cos C, \\ x &= OH \sin C = \sin b \sin C, \\ &\text{ty } OH = \cos(90° - b) = \sin b. \end{aligned}$$

Riktningscosinerna för OA äro alltså
$\cos \alpha' = \sin b \sin C$, $\cos \beta' = \sin b \cos C$ och $\cos \gamma' = \cos b$.

Om vinkeln mellan två linjer betecknas med v och linjernas riktningscosiner med resp. $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ och $\cos \alpha'$, $\cos \beta$, $\cos \gamma'$, har man följande från den rymdanalytiska geometrien välbekanta formel

$$\cos v = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Vi insätta de erhållna värdena på riktningscosinerna för linjerna OA och OB i ovanstående formel och erhålla, eftersom $v = \angle AOB = c$,

$$\cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b.$$

Efter bokstavsbyten erhållas motsvarande uttryck för $\cos a$ och $\cos b$.

Denna formel kallas 1:sta grundformeln eller 1:sta cosinussatsen (även cosinus för en vinkel).

Ovan har erhållits

$$x = \sin b \sin C.$$

Om koordinatsystemet vrides kring x-axeln, tills z-axeln sammanfaller med OB, får man på samma sätt

$$x = \sin c \sin B.$$

Av dessa båda likheter framgår sfäriska trigonometriens andra grundformel (sinussatsen):

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

* * *

Resonemanget vid härledningen av sinusteoremet är detsamma, som ligger till grund för beviset i Sferisk Trigonometri av E. G. af Klint. Beviset för cosinusteoremet hade förf. ej förut observerat i litteraturen men fann — sedan detta skrivits — att det i huvudsak återfinnes i M. Simon, Analytische Geometrie d. Raumes (Göschen). I något svenskt arbete synes det förut ej vara publicerat.

Med dessa rader har förf. endast velat fästa uppmärksamheten på ovanstående enkla bevis. Samtidigt må framhållas, att en kort kurs i sfärisk trigonometri bl. a. torde vara ett mycket lämpligt enskilt arbete å gymnasiet. Många ha för sina framtida studier nytta av kunskaper på detta område, och dessutom är det ett intressant kapitel.

Om trianglar med primtalshöjder.

En rättelse.

Professor Nat. Beckman har för mig påpekat, att satsen å sid. 175 i föregående häfte av denna tidskrift[1] är i så måtto för allmänt formulerad, att primtalshöjder kunna förekomma även i likbenta trianglar.

Detta framgår omedelbart därav, att höjden i en likbent triangel delar denna i två kongruenta rätvinkliga trianglar, vilkas gemensamma katet kan hava ett primtal till mätetal.

Men formuleringen av satsen lider också av ett annat fel; det står nämligen »rationella» i stället för »hela tal». Satsen bör därför lyda:

Om talvärdena för en triangels sidor och yta äro hela tal, kan talvärdet för en höjd icke vara ett primtal i andra fall, än då höjden är katet i en rätvinklig triangel eller höjden mot basen i en likbent triangel. *C. A. Mebius.*

[1] C. A. Mebius, Att bestämma trianglar, vilkas sidor, ytor och höjder hava rationella talvärden.

Fotpunktskurvan till en tredjegradskurva.

Fotpunktskurvan för en given kurva och en given pol är lokus för skärningspunkten mellan den givna kurvans tangent och den normal till tangenten, som går genom polen. Man finner fotpunktskurvans ekvation genom att eliminera tangeringspunktens koordinater ur tangentens, normalens och kurvans ekvationer. Denna elimination vållar ofta rätt mycket besvär.

En metod för finnandet av fotpunktskurvan till en »kubik», som besparar mig åtskillig möda, är följande:

Jag söker skärningspunkterna mellan t. ex. kubiken $xy^2 = q^2(x + p)$ och räta linien $y = kx + l$. Eliminerar jag x ur dessa ekvationer, får jag

$$y^3 - ly^2 - q^2y - q^2(kp - l) = 0.$$

Jag antar, att denna ekvation har två lika rötter y_1 och en tredje rot y_2, att således den räta linien tangerar kubiken. På grund av sambandet mellan ekvationens koefficienter och rötter kan jag därför uppställa följande tre små ekvationer:

$$2y_1 + y_2 = l;\ y_1^2 + 2y_1y_2 = -q^2;\ y_1^2y_2 = q^2(kp - l).$$

Ur den första och andra av dessa ekvationer får jag

$$y_1 = \frac{1}{3}(l \pm \sqrt{l^2 + 3q^2});\ y_2 = \frac{1}{3}(l \mp 2\sqrt{l^2 + 3q^2}).$$

Insätter jag dessa värden på y_1 och y_2 i den tredje ekvationen, blir

$$4(l^2 - q^2)^2 - 4klp(l^2 - 9q^2) - 27k^2p^2q^2 = 0.$$

Av tangentens ekvation $y = kx + l$ och normalens ekvation $y = -\frac{1}{k}x$ får jag $k = -\frac{x}{y}$ och $l = \frac{x^2 + y^2}{y}$. Dessa värden på k och l, insatta i ovanstående ekvation, ger mig slutligen fotpunktskurvans ekvation, som kan skrivas

$$4[(x^2 + y^2)^2 - q^2y^2]^2 + 4px(x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)^2 - 9q^2y^2] - \\ - 27p^2q^2x^2y^2 = 0.$$

Carl Bodlund.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Den 14 okt. sammanträdde i Stockholm ett hundratal intresserade till konstituerande av den förening, för vars bildande upprop tidgare utfärdats och även publicerats i junihäftet av denna tidskrift. Mötet öppnades av rektor *J. S. Hedström.* Därefter klarlades den planerade föreningens syften av rektor *B. Söderborg.* Det gäller, förklarade han, att hävda den matematisk-naturvetenskapliga bildningstypen, som i senaste stadga för de allm. läroverken (1933) icke fått tillbörligt stöd trots dessa ämnens förmåga att intressera och utveckla eleverna och trots deras betydelse för ett mycket stort antal elever med hänsyn till deras fortsatta studier. Föreningens styrelse får tillse vad här kan göras för att få en ändring till stånd. Föreningen kommer att realisera en önskvärd samverkan mellan företrädare för olika skolformer, högre som lägre. De studerande såväl som deras målsmän böra också vara intresserade av att stödja föreningen i dess strävan att avhjälpa bristerna i en skolordning, som medför så omfattande kompletteringsprövningar. Man borde även kunna vänta ett stöd från industrins målsmän. Den just nu nödvändiga inriktningen på en ändring av stadgan för de allm. läroverken får icke bortskymma, att föreningen har att över huvud taget intressera sig för allt som kan göras för att — inom *alla* skolformer — få undervisningen i de matematisk-naturvetenskapliga ämnena ändamålsenligt och effektivt ordnad. I den mån lugna arbetsförhållanden inträda inom vårt undervisningsväsen, böra härvid frågor angående organisationen av det inre arbetet (metoder, kursmoment, undervisningsmateriell m. m.) intaga en framskjuten plats på föreningens arbetsprogram.

Föreningen fick därefter namnet *Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning,* varefter stadgar antogos. I § 1 heter det att föreningen har till uppgift att arbeta *för främjande av ämnena matematik, fysik och kemi* inom svenskt undervisningsväsen. Och i 2 § framhålles, att föreningen står *öppen för var och en som intresserar sig för föreningens syften.*

Till föreningens ordförande utsågs rektor B. Söderborg. Styrelsemedlemmar blevo laborator B. Beckman, Uppsala, överste S. Bergelin, Sthlm, lektor C. Bergholm, Sthlm, adjunkt C. E. Blom, Sthlm, lektor E. G. Bolinder, Uppsala, professor Fr. Carlson, Sthlm, lektor K. Dahr, Örebro, professor C. Heuman, Sthlm,

professor B. Holmberg, Sthlm, lektor Axel Larsson, Göteborg, lektor M. Lemoine, Uppsala, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, professor J. Malmquist, Sthlm, lektor Eva Ramstedt, Sthlm, lektor L. G. Starck, Sthlm, lektor A. Wahlgren, Sthlm, adjunkt E. Wettervik, Sthlm.

Styrelsen utsåg senare vid sitt första sammanträde till v. ordf. prof. Fr. Carlson och till sekreterare och skattmästare lektor C. Lönnqvist.

Styrelsen fann sig först böra inrikta sig på en undersökning av den senaste skolreformen och dess verkningar. Utredningsresultaten skulle sedan framläggas för allmänheten och läggas till grund för kravet på en revision av senaste skolstadgan. Publiceringen av resultaten — en broschyr torde komma att utgivas — kan förväntas i början av nästa år.

Om föreningen är slutligen att meddela, att den redan fått en mycket stor tillslutning. F. n. äro 350 medlemmar anmälda. I Lund planerar man just nu en lokalförening, som torde komma att höja medlemssiffran åtskilligt. Medlemsavgiften är också så låg — 2 kronor — att den icke bör kunna avskräcka någon, som är intresserad för föreningens syften. Skall föreningen med framgång kunna fullfölja sin uppgift, så böra alla intresserade vara med.

Anmälan om inträde i föreningen sker enklast i samband med ett insändande av medlemsavgiften till föreningens postgirokonto n:r 85825 under adress Lektor C. Lönnqvist, Södertälje.

Conrad Lönnqvist.

Bokanmälningar.

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge. Förlag: Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1933, 122 sid., R. M. 3: 60.

Under förra läsåret höllos vid universitetet i Wien fem föredrag, vilka avsågo att för en vidare krets skildra den kris, som logiken, matematiken och fysiken för närvarande genomgå. Föredragen ha sedan utgivits i tryck under ovanstående titel. Det lilla häftet skildrar de problem, som den moderna fysiken och matematiken brottas med och vilka icke varit utan inflytande även på den mest konservativa av alla vetenskaper, logiken. Fem österrikiska vetenskapsmän redogöra här för de svårigheter, som möta forskningen.

Det första föredraget bär titeln »Die Erschütterung der klassischen Physik durch das Experiment». Här skildrar Hermann Mark de erfarenheter, vilka tvingat oss att i många avseenden ändra vår uppfattning om den klassiska fysikens lagar, nämligen Michelsons experiment, som gav upphov till Einsteins relativitetsteori, samt undersökningarna över den svarta kroppens strålning, som föranledde Planck att uppställa sin teori om ljuskvanta, ytterligare bestyrkt genom mätningarna av den fotoelektriska effekten samt genom upptäckten av Compton-effekten. Till sist omnämnas också de försök, som konstatera att böjnings- och interferensfenomen uppträda även vid korpuskulär strålning, och som alltså ge stöd åt de Broglies teori om materievågor.

I det andra föredraget »Die Wandlung des Begriffssystemes der Physik» av Hans Thirring, professor i fysik i Wien, behandlas relativitetsteorien samt moderna atomteorier. Författaren konstaterar, att den förstnämnda teorien nu fått stadga — på detta område kan uppbyggnadsarbetet anses vara avslutat. Desto större är förbistringen inom atomfysiken. De försök, som av Heisenberg, de Broglie, Schrödinger och Dirac gjorts för att ge en i alla avseenden tillfredsställande beskrivning på de invecklade förlopp, som utspelas inom atomerna, ha trots obestridliga vackra framgångar ännu icke lett till önskat resultat.

I det tredje föredraget »Die Krise der Anschauung» skildrar Hans Hahn, professor i matematik i Wien, huru vi kommit till insikt om bristerna i vår åskådningsförmåga. Författaren begränsar sitt ämne till geometriska spörsmål och visar hur åskådningen måste elimineras för att ersättas av logiska konstruktioner. Flerdimensionella och icke-euklidiska geometrier ha sålunda uppstått.

Det fjärde föredraget av Georg Nöbeling behandlar »Die vierte Dimension und der krumme Raum». Här får läsaren en redogörelse för den fyrdimensionella euklidiska geometrien liksom för Bolyai–Lobatscheffskys hyperboliska och Riemanns elliptiska geometrier. Till sist besvaras också frågan huruvida de icke-euklidiska geometrierna kunna anses motsvara den experimentella erfarenheten. Eftersom ljusstrålarna enligt relativitetsteorien förhålla sig som geodetiska linjer i en krökt rymd, kan man med användande av Riemanns geometri skildra verkligheten på ett enklare sätt än med den vanliga euklidiska. Föredraget avslutas med några roande tankeexperiment, hämtade från geometriens yngsta gren, topologien.

Det sista föredraget »Die neue Logik», vilket framfördes av Karl Menger, e. o. professor i matematik i Wien, är kanske det mest uppseendeväckande. I våra dagar genomgår även logiken

en kris. Denna vetenskap, som i 2 000 år bibehållit de grundprinciper, som ursprungligen formulerats av Aristoteles, har icke kunnat tillfredsställa den moderna matematikens anspråk på precision och fullständighet. Menger skisserar först, hur logiken omgestaltades under senare hälften av 1800-talet till en, som det föreföll, fulländad lärobyggnad. Men vid sekelskiftet upptäckte Russel en rent logisk paradox, som framkallade en svår kris. Främst bland dem, som försökt finna en utväg ur svårigheterna, står Hilbert med sin formalistiska eller metalogiska metod. En annan möjlighet grundar sig på Kroneckers arbeten från 1880-talet, vilka givit upphov till intuitionismen.

Mängen anser, att vissa grenar av matematiken mera likna en lek än en vetenskap. Menger påpekar *ett* exempel: de icke-euklidiska geometrierna. Men just dessa ha, som han framhåller, blivit av betydelse för de experimentella vetenskaperna.

Ovanstående referat har endast kunnat ge korta antydningar om de fem intresseväckande föredragen. För den som önskar tränga djupare in i frågorna finnas litteraturhänvisningar efter varje föredrag. Det innehållsrika häftet kan rekommenderas åt alla, som önska få ett begrepp om den moderna exakta vetenskapens problemställning.

Anna Beckman.

Heinrich Timerding, *Aufgabensamlung zur projektiven Geometrie.* Samlung Göschen nr 1060, 1933, 140 sid., R. M. 1: 62.

Trots titeln är det ej fråga om en exempelsamling utan om en verklig lärobok i projektiv geometri, uppställd och ordnad ungefär som Euklides' Elementa, med 115 lösta uppgifter, teorem och problem för att använda den euklideiska terminologien. Boken innehåller intet enda problem, som ej är löst.

Författaren behandlar i stort sett endast den plana geometrien. I några få fall går han utom planet för att underlätta bevisföringen. Då han behandlar perspektiva avbildningar, är det givetvis också nödvändigt för honom att taga till den tredje dimensionen, men han återvänder snarast möjligt till planet.

Efter ett inledande kapitel behandlar författaren först fullständiga fyrhörningar och fyrsidingar för att få fram teorien om harmoniska punkter och involutioner. Därefter ägnar han jämförelsevis stort utrymme åt affina avbildningar, d. v. s. projektiva avbildningar, i vilka oändlighetslinjen motsvarar sig själv. Härvid studerar han särskilt enveloppen till de räta linjer, som på två fixa räta linjer utskära likformiga punktrader, och visar genom att härleda kurvans ekvation i rätvinkliga koordinater, att kurvan är en parabel.

Han studerar cirkelns affina bilder och visar likaledes genom att härleda dessa bilders ekvationer i rätvinkliga koordinater, att de äro ellipser.

Därefter övergår författaren till perspektiva avbildningar och rör sig därvid huvudsakligen med perspektiva avbildningar av raka punktrader och strålknippen samt inför projektiva koordinater på den räta linjen (en punkts dubbelförhållande till tre fixa punkter på linjen). Något sysslar han med den projektiva avbildningen av ett plan i sig, som kallas för central perspektivitet, varefter han vänder sig till kägelsnitten, som han definierar som perspektiva avbildningar av cirkeln, d. v. s. plana snitt på cirkulära koner, givetvis i regeln sneda koner. Särskilt uppehåller han sig vid teorien om poler och polarer men härleder också de fundamentala egenskaperna hos brännpunkter (definierade genom sina polaregenskaper) och styrlinjer. De koniska sektionerna kunna skära oändlighetslinjen i två skilda, två sammanfallande eller inga punkter och sönderfalla därför i tre arter, hyperblar, parablar och ellipser, vilkas ekvationer i rätvinkliga koordinater han härleder. Därigenom uppvisar han, att de två sistnämnda kurvorna äro identiska med de kurvor, som på annat sätt definierats i kapitlet om affina avbildningar. Han anger hur man på enklaste sätt kan perspektiviskt avbilda en cirkel i en hyperbel eller en parabel. I båda fallen är cirkelns plan vinkelrätt mot bildplanet, som tangerar cirkeln. I förra fallet är perspektivitetscentrums avstånd från bildplanet lika med radien, i senare fallet lika med diametern.

Nästa kapitel handlar om projektiva avbildningar av raka punktrader och strålknippen, och på vanligt sätt studeras egenskaperna hos de kurvor, vilkas punkter äro snittpunkterna mellan varandra motsvarande strålar i två projektiva strålknippen, eller vilkas tangenter äro sammanbindningslinjerna mellan varandra motsvarande punkter i två projektiva raka punktrader, och det uppvisas, att de så erhållna kurvorna äro koniska sektioner. Projektiva koordinater införas.

Slutkapitlet handlar om kollineära avbildningar av planet, varvid särskilt de sig själva motsvarande punkterna och räta linjerna äro föremål för studium.

Författarens framställning är synnerligen koncentrerad, varför jag blott kunnat antyda det allra viktigaste av det rika innehållet. Härav följer givetvis, att boken ej är lättläst. På sina ställen är det verkligt svårt att följa författaren. Någon lämplig lärobok för skolynglingar är det ej, ehuru endast vanlig skolgeometri förutsättes. Den torde knappt vara lämplig som första lärobok i pro-

jektiv geometri ens för mera avancerade matematici än skolpojkar. För den som förut har någon föreställning om projektiv geometri, är den däremot mycket givande.

P. G. Persson.

Oskar Klein, *Einsteins relativitetsteori i allmäntillgänglig form.* Natur och Kultur 1933. 137 sid., pris häft. kr. 2: 25, inb. kr. 3: —.

Författaren har redan tidigare dokumenterat sin förmåga att populärt behandla ämnen, som i sig själva äro abstrakta och svårtillgängliga. Man minns med nöje den utmärkta framställningen »Vad vi veta om ljuset», som tidigare utkommit på samma förlag. Författaren betecknar detta arbete som en förberedelse till det nu föreliggande.

Stommen i boken utgöres av tre radioföredrag. I det första behandlas Michelsons försök och Lorentz' förklaring till detsamma. I det andra följer en framställning av Einsteins nya rums- och tidsbegrepp och av den speciella relativitetsteoriens grundtankar. Av det tredje får man en god uppfattning om de idéer, som varit vägledande för Einstein vid uppställandet av hans allmänna relativitetsteori.

Till föredragen knyta sig diskussioner mellan tre fysikaliskt intresserade personer, som tänkas åhöra föredragen. I detta tillägg får författaren tillfälle att ge några historiska återblickar samt att utförligare sysselsätta sig med de paradoxer som möta och verka förbryllande på den oinvigde. Anmälaren tror dock, att framställningen skulle ha blivit ännu lättare tillgänglig, om tilläggets innehåll inarbetats i den övriga texten.

Boken präglas av sin författares grundliga förtrogenhet med ämnet och utgör ett mycket värdefullt tillskott till vår populära fysiklitteratur.

D. Enskog.

Iwan Bolin och Bror Gustaver, *Kemien och elektriciteten.* Deras samverkan i det praktiska livets tjänst. Natur och Kultur 1933. 160 sid. häft. kr. 2: 25.

Ovannämnda arbete utgöres av en teoretisk del (121 sid.) och en teknisk del (28 sid.).

Den teoretiska delen behandlar elektricitetens natur, de elektriska storheterna och viktigare lager, elektricitetens ledning i olika ämnen och de galvaniska elementen. Under dessa huvudrubriker ha författarna på det begränsade utrymmet lyckats inrymma mycket av såväl historisk art som av modern uppfattning av de elektriska fenomenen. 68 väl valda försök — en del

med schematiska teckningar — ge anvisning på hur man med enkel apparatur på egen hand kan sätta sig in i åtskilliga av elektrokemiens många problem. I texten finnas 12 tabeller över konstanter, huvudsakligen ledningsförmåga, dissociationsgrad och lösningstryck. Värdet av den teoretiska delen förhöjes genom ett antal lättare övningsexempel.

Om recensenten må tillåta sig att göra några anmärkningar, skulle dessa i första rummet gälla författarnas behandling av elektrolys av koppar- och natriumsulfat. Den moderna uppfattningen av den s. k. »sekundära utfällningen» anges endast i not. Varför ej i texten? Vidare hå väl de bilder av atommodeller enligt Bohr, som finnas på sid. 54, nu endast historiskt intresse.

Den tekniska delen ger anvisningar på de kemiska industrier, som grunda sig på tillämpning av de elektriska fenomenen, och i anslutning till dessa äro fogade redogörelser för 11 försök.

Boken är välskriven och klar och utgör ett värdefullt komplement till de av Bolin förut på samma förlag utgivna delarna. Den rekommenderas särskilt till skolbibliotek.

E. Sandén.

Gradualavhandlingar.[1]

Bengt Aurell: Bestimmung der Längendifferenz zwischen den astronomisch-geodätischen Zentralen Schwedens und Dänemarks Lovö und Buddinge im Jahre 1929. Disp. i Stockholm 24 maj 1933. Opponenter: docenten Sten Asklöf och fil. lic. Erik Stenquist.

På föranstaltande av Baltisk-geodetiska kommissionen utfördes under sensommaren och hösten 1929 astronomiska observationer för longitudsbestämning på följande runt Östersjön belägna stationer: Potsdam, Köpenhamn (Buddinge), Stockholm (Lovö), Helsingfors, Pulkowa, Reval, Riga och Posen. Observationerna för bestämning av lokaltiden utfördes med passageinstrument och registrermikrometer. Tidsjämförelserna åstadkommos genom, så vitt möjligt, samtidigt mottagande å samtliga stationer av de trådlösa tidssignalerna (koincidenssignalerna) från Bordeaux, Eiffel och Nauen. Den del av detta arbete, som föll på Sveriges lott och som omfattade tre perioder: en första på Lovö, en andra i Buddinge och en tredje på Lovö, utfördes av förf. med biträde

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

av fil. lic. E. Stenquist. Dessa förf:s observationer ha i ifrågavarande avhandling bearbetats för bestämning av longitudsdifferensen Lovö-Buddinge.

Passageobservationerna, som under gynnsamma väderleksförhållanden började före eller efter mottagningen av Bordeauxsignalerna (kl. 21), pågingo till tiden för Nauensignalernas ankomst kl. 1, eller längre, med ett kort avbrott för upptagning av Eiffelsignalerna omkring kl. 23,30.

Vid bearbetningen ha observationerna uppdelats i grupper om 4 à 8 stjärnor, av vilka en polnär stjärna i övre eller undre kulminationen. Varje sådan grupp har underkastats utjämning enligt minsta kvardratmetoden med urståndet och instrumentets azimut som obekanta, varigenom således ur varje grupp erhållits en fullt oberoende bestämning av dessa båda storheter. Vid bestämmandet av vikterna för de i dessa utjämningar ingående observationerna har förf. efter påvisande av att medelfelet i bestämningen av instrumentaxelns lutning, multiplicerad med lutningskoefficienten $\frac{\cos(\varphi \mp \delta)}{\cos \delta}$, på ifrågavarande polhöjder och för stjärnor på 50° eller högre deklinationer uppgår till samma belopp som medelfelet i den observerade passagetiden, frångått den hittills brukliga metoden, enligt vilken vikterna beräknats enbart ur medelfelen i passagetiderna, och, efter att ha uppställt en formel för viktsberäkningen, i vilken medelfelet i lutningsbestämningen ingår, enligt denna beräknat vikterna för de individuella observationerna.

De ur nämnda stjärngrupper, som till antalet variera mellan 3 och 6 per observationsnatt, erhållna värdena på urståndet ha därefter behandlats som enstaka observationer och tilldelats vikter, proportionella mot de ur utjämningarna erhållna medelfelskvadraternas reciproktal, samt underkastats en ny utjämning, som, under antagande av en konstant dragning hos uret, givit urkorrektionerna och deras medelfel vid tiderna för resp. tidssignalers mottagning.

Som resultat av de observationer och räkneoperationer för vilka ovan redogjorts, har sålunda erhållits den lokala stjärntiden vid de tidsmoment då tidssignalerna mottagits, vilka sistnämnda hänförts till resp. signalseriers mittpunkt.

Mottagningen av tidssignalerna utfördes enligt den av prof. Wanach förbättrade Hänni-metoden, d. v. s. med hjälp av en halvsekundspendel (»hjälpur»), försedd med kontaktanordning, som varje sekund åstadkommer en kortslutning i strömkretsen genom radiomottagarens hörlur. Vid de tillfällen, då kortslutningarna inträffa samtidigt med signalerna, bringas ljudet av de

sistnämnda att försvinna (»släckas ut») i hörluren. Vid tidssignalmottagningen har man att på detta sätt bestämma de hjälpurssekunder och signalnummer som koincidera. Genom att upprepade gånger under loppet av en tidssignalmottagning samtidigt registrera båda urens gång på kronografremsan bestämmes differensen mellan dem, varigenom signalmottagningen kan överräknas i huvudurets tid. Sedan denna beräkning, d. v. s. fastställandet av huvudurets tid vid signalseriens mitt samt medelfelet i denna bestämning utförts, har, efter tillfogande av det genom observationerna bestämda urståndet, erhållits den lokala stjärntiden vid nyssnämnda epok. Den i »Bulletin Horaire» och »Beobachtungs-Zirkular der Astronomischen Nachrichten» publicerade Greenwich-tiden för sigalernas utsändning ha, efter anbringande av nödiga korrektioner för erhållande av enhetligt system, korrigerats för radiovågornas fortplantningstid samt för polvariationen. Genom jämförelse mellan den sålunda erhållna stjärntiden i Greenwich vid signalseriens mitt och den genom observationerna fastställda lokala stjärntiden vid samma epok har longitudsdifferensen till Greenwich erhållits samt ur de resp. bestämningarnas medelfel vikten för densamma beräknats.

För Lovö-stationen erhölls under den första observationsperioden som viktat medeltal av 29 bestämningar med sammanlagt 252 stjärnpassager longituden till Greenwich $\lambda_1 = -1^h\,11^m\,19^s{,}909$ med medelfelet $\mp 0^s{,}0036$.

För Buddinge erhölls motsvarande resultat av 27 bestämningar med sammanlagt 258 passager $\lambda_B = -0^h\,50^m\,00^s{,}588 \pm 0^s{,}0051$.

Den andra observationsperioden å Lovö gav som resultat av 38 bestämningar med 313 stjärnor $\lambda_2 = -1^h\,11^m\,19^s{,}884 \pm 0^s{,}0044$.

Den stora differensen $\lambda_1 - \lambda_2$, som uppgår till ungefär 6-dubbla beloppet av resp. bestämningars inre medelfel, tyder på systematiska fel i ifrågavarande bestämningar, och förf. framhåller sannolikheten av att dessa härröra dels från periodiska refraktionsanomalier och dels av en variabel personlig ekvation. Att det verkliga felet, oavsett den personliga ekvationen, vida överstiger det beräknade medelfelet är uppenbart, och förf. påpekar i anslutning härtill olämpligheten av att, som ofta sker, slutresultatets medelfel beräknas ur de inre medelfelen. Detta skulle för Lovöstationen ge ett medel av $\pm 0^s{,}003$ under det att medelfelet, beräknat ur differensen $\lambda_1 - \lambda_2$ ger $\pm 0^s{,}012$. Ur värdena $\lambda_L = -1^h\,11^m\,19^s{,}899 \pm 0^s{,}012$ och $\lambda_B = -0^h\,50^m\,00^s{,}588 \pm 0^s{,}005$, vilket förstnämnda är det viktade medeltalet av λ_1 och λ_2, erhålles som slutresultat:

Instrumentspelarens i norra meridianpaviljongen å Lovö longi-

tud $= 0^h\,21^m\,19^s{,}311 \pm 0^s{,}013$ öster om pelaren i östra meridianhuset i Buddinge.

In en undersökning av tidssignalmottagningarnas från olika utsändningsstationer bidrag till resultatet påvisar förf., att de genom Bordeauxsignalerna erhållna logitudiderna, såväl för Lovö som för Buddinge, giva västligare longitud än Eiffel- och Nauensignalerna. Förklaringen härtill torde vara att söka i Bordeauxsignalernas sämre hörbarhet, som förorsakat, att vid mottagningen av dessa signaler, den efter en »släckning» återuppträdande förkortade signalen, ofta icke uppfattats.

Avhandlingens sista del utgör en på minsta kvadratmetoden grundad teoretisk behandling av det gamla problemet om det gynnsammaste valet av stjärnor vid tidsbestämningar. Resultatet av denna undersökning, som framgår av diagrammen på avhandlingens 5 sista sidor, visar, att för de polhöjder som undersökningen avser, tidsstjärnorna böra väljas i närheten av och hälst lika fördelade norr och söder om zenit samt att azimutstjärnan bör vara en stjärna i undre kulminationen på 50° à 60° zenitdistans. Vid detta val av stjärnor erhålles största möjliga vikt för den samtidiga bestämningen av tiden och instrumentets azimut. Avhandlingen slutar med en på nämnda undersökning baserad kritik av det för ifrågavarande longitudsbestämning av Baltisk-Geodetiska kommssionen fastställda stjärnprogrammet.

Föredrag under hösten 1933 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Göteborg:

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. A. Lindh, sekr. lärov.-adj. H. Lindroth.

Föredrag: prof. The Svedberg, Sedimentering i centrifugalfält (28/11).

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. F. Berglund; förman i arbetsutskottet fil kand. N. E. Fremberg.

Föredrag: fil. lic. V. Bergström, Geometrisk tolkning av några determinantsatser (27/10); prof. M. Riesz, Matematikens bildningsvärde (24/11); rektor P. G. Persson, Matematiken och naturvetenskaperna i de högre allm. läroverken (4/12, tillsammans med Fysiska Fören. o. Kemiska Fören.).

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: doc. O. Lundquist, Neutronstrålning (25/10); amanuens B. Kullenberg, Upptäckten av vätets isotopi (6/12).

Kemiska Föreningen, ordf. doc. O. Stelling, sekr. aman. E. Eftring.

Föredrag: Vid sammanträde (9/9) tillsammans med Skandinav sekt. av intern. läderkemistföreningen: ing. J. S. Aabye, Köpenhamn. Sammenlignende Undersøgelser over Analysmetoder til vegetabilske Garveekstrakter; doc. E. Larsson, Om p_H-bestämning med demonstrationer; ing. S. Tarling, Den moderna kemiens tillämpning på nyare garvningsförfaranden; dir. G. Ehrnberg, Fel och skador å hudar och skinn; doc. O. Stelling, Stereoisomeri och röntgenabsorptionsspektra (24/10); fil. lic. H. Fredholm, Om ammoniakaliska magnesiumsaltlösningar (16/11); prof. L. Smith, Riktlinjer för planeringen av den nya kemiska institutionen (13/12); prof. B. Holmberg, Stockholm, Jod- och persulfatoxidationer av merkaptalättiksyror (18/12).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: fil. lic. A. Pleijel, Isoperimetriska problem (26/10); prof. M. Fréchet, Sur les chaînes de Markoff (7/12).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. O. Klein, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: prof. E. Hulthén, Nyare unders. över den tunga väteisotopen (13/10); fil. lic. J. Tandberg, Från Deutsche Physiker Tagung i Würzburg (27/10); dr. R. Schnorman, Die Molekularstrahlmethode von Stern und Gerlach (17/11); doc. F. Lindholm och fil. kand. H. Olsson, Svenska övervintringsexpeditionen på Spetsbergen under 2:dra intern. polaråret 1932/33 (23/11, tills. med Svenska Geofysiska Föreningen); prof. C. Benedicks, Nyare unders. över den elektrotermiska homogeneffekten (8/12).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. ingenjör C. H. Johansson.

Föredrag: dr. G. Siljeholm, Glödelektrisk elektronemission, därjämte visning av A.-B. Hammarbylampans glödlampsfabrik (29/11).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: docent A. Ölander, Elektrokemiska undersökningar av metallegeringar. Entropien i intermediära faser (19/10); fil. lic. H. Erdtman, Dehydrering som biosyntetisk reaktionsprincip (4/12).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. O. Stenström, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Fysiska Sällskapet, ordf. laborator B. Beckman, sekr. doc. E. Bäcklin.

Föredrag: laborator B. Beckman, Kopparoxidullikriktaren (18/10) och Försök att uppnå mycket låga temperaturer (22/11); amanuens S. v. Friesen, Elektronmikroskopet (22/11).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. L. Ramberg, sekr. fil. lic. A. Fredga.

Föredrag: fil. mag. E. Samén, Några inledande kinetiska undersökningar över bromering av alifatiska sulfo-karbonsyror och disulfoner (27/10); fil. mag. A. Mellander, Några enbasiska alifatiska alkylsulfid- och alkylsulfonkarbonsyror (27/10); doc. P. Nylén, Nyupptäckta oxider, referat (29/11).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLV, 1933. N:r 6 (juni): C. Kjellin (ref.), Det nyfunna porträttet av C. W. Scheele. — K. Hellbom och A. Vestgren, Den rombiska kromkarbidens kristallbyggnad. — N:r 7 (juli): N. Hellström, Bromometrisk bestämning av sulfidsyror. — B. Englund, Till kännedomen om arsonsyrornas sönderfall. — B. und H. von Euler, C-Vitamin in Meeresfischen und Evertebraten. — N:r 8 (augusti): C. Du Rietz, Der Austausch von Kationen bei starkem Sulfitzellstoff. — B. Englund, Konfigurationsbestämning av polyoxiföreningar. — N:r 9 (sept.): O. Aschan, Nya försök över santenon. — P. Klason, Om tetrakoniferylaldehydhydrosulfonsyra (tetralignosulfonsyra). — N:r 10 (okt.): K. und S. Myrbäck, Ueber die Grenzverzuckerung der Stärke und das sogenannte Komplement der Amylasen. — E. Larsson, Användning av löslighetsdata för bestämning av syremolekylers aktivitetskoefficienter i natriumklorid- och kaliumkloridlösningar. — N:r 11 (nov.): T. Sundberg, Sambandet mellan mjölkens sockerhalt, klorhalt och serumrefraktion. — E. Adler und H. von Euler, Ueber die Verbreitung von Lyochromen und von Vitamin B. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk Tidskrift. Årg. XIV, 1933, dubbelh. 3—4.

Ur innehållet. Östen Bergstrand, Fotografisk best. av stjärnmagnituder. — Knut Lundmark, Nyare unders. över utomgalak-

tiska stjärnsystem. — Björn Svenonius, Några drag ur gamla Egyptens astronomi. — Hans Gertz, Ett nytt solur. — K. Lundmark, Astron. Gesellschafts kongress 1933. — K. Lundmark, Dubbelstjärnornas Vintergata. — N. V. E. Nordenmark, Stockholmsutställningens Zeissplanetarium överlämnat till Sv. Astron. Sällskapet. — Notiser.

Industritidningen Norden. Årg. 1933, h. 21—49.

Ur innehållet. De viktigaste uppfinningarna inom Asea under de gångna 50 åren. — Försockring av cellulosa. — Bilkonstruktionens inverkan på vägkorrugeringen. — Försvarsmedel mot koloxiden. — Den metallurgiska högfrekvensens utveckling. — Neo-Bechstein-flygeln. — Filmningen av bildtextöversättningar. — Tekniska hjälpmedel inom handel o. industri. — Telefonapparaters stängning för utgående samtal. — Aluminiums nyare landvinningar inom elektrotekniken. — Diesel-flygmotorer. — »Den tekniska utvecklingen», berättelse till Ingenjörsvetenskapsakademien. — Flytande aerodromer. — Från världsutställningen i Chicago 1933.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1933, h. 1—11.

Ur innehållet. Strålkastarbelysning. — Det elektr. kontrollväsendet. — Den moderna radiomottagaren. — Om bakelit o. dess framställning m. m. — Asea, femtio år. — Elektrifieringsarbetet vid Statens Järnvägar. — Nya elektriska ljuskällor. — Tillverkning av småmotorer. — Elektrovärmeutställningen i Essen. — De keramiska isolermaterialen. — Ett stort antal elektr. nyheter.

Matematisk Tidsskrift, København 1933, h. 2 o. 3.

Ur innehållet i avd. **A.** Mønsted, Hulspeilet og Keglesnittene. — Rubinstein, Frivillige Elevarbejder i Gymnasiet. — J. Hjelmslev, Forslaget vedrørende Gymnasiets Undervisning i Matematik. — E. Juul, Den stereografiske Projektion. — S. A. Christensen, Indholdet af Descartes Geometri. — Avd. **B.** H. Bohr, Stabilitet og Næstenperiodicitet. — T. Bonnesen, Et maksimumsproblem vedrørende Orbiformer. — R. Petersen, En analytisk funktion med specielle næstenperiodiske Egenskaber.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1933, h. 2 o. 3.

Ur innehållet. W. Lorey, Der Mathematiker und das numerische Rechnen. — N. Nyberg, Bemerkungen über die Berechnung einer Körperbasis in einem alg. Zahlkörper. — H. Bergh Kragemo, Ludvig Sylow. — Bokanmeldelser. — Opgaver.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

633) *F är den ena brännpunkten i en given ellips; P är en annan given punkt. Sök enveloppen för den variabla ellips, som går genom F, har sin ena brännpunkt i P och den andra på den givna ellipsen.* *X.*

634) *Att genom en triangels ena vinkelspets draga en rät linje så, att om perpendiklar från de övriga hörnen fällas mot den sökta linjen de så uppkomna rätvinkliga trianglarna bliva likytiga.* *X.*

635) *Inuti en regelbunden tetraeder är vald en punkt, vars avstånd till sidoytorna förhålla sig som 1 : 3 : 4 : 8. Beräkna punktens avstånd till tetraederns medelpunkt.* *S. B.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

636) Beräkna $x^2 - y^2$ ur systemet $\left.\begin{aligned} ax + by &= \frac{a+b}{2} \\ bx + ay &= \sqrt{ab} \end{aligned}\right\}$.

Svar: $\frac{a-b}{4(a+b)}$.

637) Beräkna $\sqrt{x}$ och $\sqrt{x+1}$, då $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$, utan att lösa ekvationen.

Svar: $\frac{a^2-1}{2a}$ och $\frac{a^2+1}{2a}$.

638) Visa, att ekvationen $\frac{a}{x-p} + \frac{b}{x-q} = 1$ har reella rötter, om $ab > 0$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 636—644 äro insända av *X*, uppg. 645—653 av *S. B.*

639) Ekvationen $4x^2 + 2x + 1 = 0$ har rötterna x_1 och x_2; ekvationen $4y^2 + 2(a+1)y + 1 = 0$ har rötterna y_1 och y_2. Beräkna

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2).$$

Svar: $\frac{a^2}{16}$.

640) I triangeln ABC är $AB = AC$. Om AC utdrages stycket $CD = CB$, så blir triangeln ABD likbent. Beräkna $AB : BC$.

Svar: 0,802 eller $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$.

641) Visa, att fjärde proportionalen till radierna i den inskrivna och de vid kateterna vidskrivna cirklarna i en rätvinklig triangel är lika med halva omkretsen.

642) Höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel delar denna i två deltrianglar med omkretsarna 0,6 m och 0,8 m. Beräkna den ursprungliga triangelns omkrets.

Svar: 1 m.

643) Att i en given cirkel inskriva en femhörning, då man känner mittpunkterna till de cirkelbågar, som femhörningens sidor överspänna.

644) Sidan AB i kvadraten $ABCD$ är diameter i en utåt uppritad halvcirkel. P är en punkt på cirkelbågen. Linjerna PC och PD dela AB i tre delar. Visa, att den mellersta av delarna är medelproportional till de båda andra.

645) Visa, att en rät linje är delad enligt »gyllene snittet», om mellan delarna x och y råder sambandet $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$.

646) Om vinklarna i en triangel bilda aritmetisk serie och motsvarande sidor geometrisk serie, så är triangeln liksidig.

647) Lös ekvationssystemet: $\left.\begin{aligned} x^2 - yz &= 1 \\ y^2 - xz &= 7 \\ z^2 - xy &= -5 \end{aligned}\right\}$.

Svar:

x	2	-2
y	3	-3
z	1	-1

648) Om n är ett udda tal och man har

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \text{ så är}$$

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

649) De gemensamma tangenterna till två cirklar med radierna 1 cm och 4 cm begränsa två kongruenta, likbenta trianglar. Beräkna härav avståndet mellan medelpunkterna.

Svar: $\frac{\sqrt{375}}{3}$ cm eller $\frac{\sqrt{250}}{3}$ cm.

650) Visa, att en triangels sidor bilda aritmetisk serie, om för två vinklar α och β råder sambandet

$$tg\,\frac{\alpha}{2}\cdot tg\,\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}.$$

651) Bestäm p så, att parabeln $y^2=2px$ går genom två av skärningspunkterna för kurvorna $x^2+3y^2=16$ och $3x^2-y^2=8$, och visa, att parabeln halverar vinkeln mellan ellipsen och hyperbeln.

Svar: $p=\pm 1$.

652) En godtycklig punkt inuti en tetraeder har avstånden d_1, d_2, d_3 och d_4 till sidoytorna. De motsvarande höjderna äro h_1, h_2, h_3 och h_4. Visa, att $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}=1$.

653) Angiv ekvationen för den tangent, som i två punkter berör kurvan $y=x^4-2x^3-3x^2$.

Svar: $y=-4x-4$.

Lösningar till uppg. 600—602.

600) *Sidorna i en plan fyrhörning äro i ordning 3 cm, 4 cm, 6 cm och 5 cm. Hörnen tänkas försedda med ledgångar. Minsta sidan fasthålles. Sök orten för den inskrivna cirkelns medelpunkt. X.*

Om minsta sidans ändpunkter äro (0; 0) och (3; 0), medelpunktens koordinater $(x; y)$ samt fyrhörningens vinklar 2α, 2β, 2γ och 2δ, så är $tg\,\alpha=\frac{y}{x}$, $tg\,\beta=\frac{y}{3-x}$, $tg\,\gamma=\frac{y}{1+x}$, $tg\,\delta=\frac{y}{5-x}$. Av relationen

$$\alpha+\beta=180^\circ-(\gamma+\delta) \text{ fås}$$

$$tg\,(\alpha+\beta)=-tg\,(\gamma+\delta) \text{ och}$$

$$\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}=-\frac{tg\,\gamma+tg\,\delta}{1-tg\,\gamma\,tg\,\delta}, \text{ varav efter insättning}$$

och förenkling

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{40}{9}.$$

Orten är alltså en cirkel. Maximivärdet för den inskrivna cirkelns radie är $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ cm och för fyrhörningens yta $6\sqrt{10}$ cm². *S. B.*

601) *En ellips har sitt centrum i ett av hörnen i en rektangel och går genom de andra tre. Rektangelns yta är A. Hur stor är ellipsens?* *X.*

Rektangeln kan ersättas av en parallellogram $OABC$. Tages $OB(=a_1)$ till x-axel och den med $AC(=n)$ parallella konjugatdiametern (längd $=2b_1$) till y-axel, blir ellipsens ekvation $b_1^2x^2+a_1^2y^2=a_1^2b_1^2$. Enär punkten $\left(\frac{a_1}{2};\frac{n}{2}\right)$ ligger på kurvan, fås $n=b_1\sqrt{3}$. Om axelvinkeln $=\theta$, blir

$$a_1b_1\sin\theta=ab \text{ och } 2A=a_1n\sin\theta,$$

varav $2A=ab\sqrt{3}$ och svaret: $\frac{2\pi A}{\sqrt{3}}$. *S. B.*

Genom en lämplig projektion kan parallellogrammen överföras i en romb och ellipsen i en cirkel. Då alla ytor ändras i samma skala, fås ytförhållandet $=\pi a^2:\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. *X.*

602) *På ett cirkelrunt papper med radien R utmärkes en punkt P på avståndet $k\times R$ från centrum. Man viker ihop papperet så, att det invikta segmentets båge går genom P. Därpå utslätas papperet åter och en ny vikning företages omkring en annan korda o. s. v. Hur stor del av papperets yta förblir fri från spår av veck hur många gånger proceduren än upprepas?* *X.*

Om fokus till en ellips speglas i en tangent, ligger spegelbilden på en cirkel, vars radie är = storaxeln och vars centrum ligger i andra fokus. Härav följer omedelbart, att den linje, utefter vilken vikning sker, envelopperar en ellips, vars storaxel är $=R$ och brännpunktsavstånd är kR. Då ellipsens yta är $=\frac{\pi}{4}\cdot R^2\sqrt{1-k^2}$, blir svaret $\frac{1}{4}\sqrt{1-k^2}$. *S. B.*

Analytisk lösning av *S. W.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1933.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Parallellt med sidan BC i den liksidiga triangeln ABC drages en rät linje, som skär AB och AC i D resp. E. DE är hälften så stor som vinkelräta avståndet mellan linjerna DE och BC. Beräkna förhållandet $AE : EC$.

2. I ett parallelltrapets äro de tre minsta sidorna lika långa. Var och en av de trubbiga vinklarna är 100°, och var och en av diagonalerna är 1,5 dm. Beräkna trapetsets sidor.

3. En aritmetisk serie har 21 termer. Termernas summa är lika med kvadraten på mellersta termen. Produkten av första och sista termerna är 405. Vilken är serien?

4. En kommun upptager ett lån, som skall amorteras genom 30 lika stora annuiteter. Annuiteten erlägges vid varje års slut, första gången ett år efter lånets upptagande. Hur många procent av lånekapitalet utgör annuiteten, om 4,5% årlig ränta på ränta beräknas?

5. En cirkel och en kvadrat ha samma medelpunkt och lika stora ytor. Beräkna sammanlagda längden av de cirkelbågar, som falla inom kvadraten, om dennas sida är 2 dm.

6. Bestäm a i ekvationen

$$2x^2 + ax + 1 = 0$$

så, att ekvationens ena rot blir lika med två gånger den andra roten, och angiv rötterna.

7. Kring en cirkel med 1 dm:s radie har man omskrivit en triangel, i vilken en sida är 3 dm och en av de vid denna sida stående vinklarna är 60°. Beräkna triangelns övriga vinklar och yta.

8. Genom mittpunkten av sidan AB i den liksidiga triangeln ABC har man dragit en rät linje, som skär sidan AC i D och den

över B förlängda sidan CB i E. Ytan av triangeln CDE är dubbelt så stor som ytan av triangeln ABC. Beräkna förhållandet $AD : DC$.

Resultat: **1.** $\sqrt{3}:4$. **2.** 0,979 dm och 1,319 dm. **3.** 15; 15,6; 16,2; ... 27 eller omvänt. **4.** 6,14 %. **5.** 2,742 dm. **6.** $a = 3$, rötterna -1 och $-\frac{1}{2}$ eller $a = -3$ och rötterna 1 och $\frac{1}{2}$. **7.** 76°,52 och 43°,48 samt 5,508 dm². **8.** $1:\sqrt{2}$. Drag från B en linje parallell med AC. Triangeln behöver ej vara liksidig utan kan ha godtycklig form.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. En stipendiefond på 4 000 kronor insattes vid början av år 1933 i bank mot 4% årlig ränta. Vid varje års slut uttagas 100 kronor till ett stipendium. När fonden vid slutet av ett år, sedan räntan lagts till kapitalet och stipendiet utbetalats, överstiger 8 000 kronor, skola från och med det följande året två stipendier utbetalas. När kan detta ske första gången?

2. En liksidig triangel har ett hörn i brännpunkten till parabeln $y^2 = 2px$. Den motstående sidan är en mot parabelns axel vinkelrät korda i parabeln, belägen längre bort från vertex. Hur stor är triangelns yta?

3. I en cirkel är inskrivet ett parallelltrapets, i vilket tre sidor äro lika långa och var och en av dem dubbelt så lång som den fjärde sidan. Beräkna de medelpunktsvinklar, som trapetsets sidor upptaga, samt trapetsets yta, då cirkelns radie är 1,6 dm.

4. Den plana begränsningsytan av ett halvklot med radien r är bas i en rät cirkulär kon, som skär halvklotet så, att $^1/_3$ av halvklotets buktiga yta faller inom konen. Beräkna konens volym.

5. Till kurvan $3y = 2x^3 - 3x$ kunna dragas två tangenter, som äro parallella med linjen $x - y = 0$. Var och en av dessa tangenter råkar kurvan i en annan punkt än tangeringspunkten. Bestäm dessa punkter.

6. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna $A(a, 0)$ och $B(-a, 0)$ samt den linje, vars ekvation är $y = h$. En triangel ABC har två hörn i de givna punkterna; det tredje rör sig på linjen $y = h$. Sök orten för höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC. När inträffar det, att den givna linjen

$y = h$ blir styrlinje för orten, och var ligger då ortens brännpunkt?

7. Genom en punkt P på kurvan $y = x^3 - x^2 + x$ dragas kurvans normal och en med x-axeln parallell linje. Dessa båda linjer bilda tillsammans med y-axeln en triangel. Undersök om dennas yta får något maximi- eller minimivärde, då P beskriver kurvan, samt beräkna triangelytan, då punkten P avlägsnar sig obegränsat på kurvan.

8. I en icke liksidig sexhörning äro alla vinklarna lika stora. Hörnen kallas i ordning A, B, C, D, E, F. Visa, att $AB + BC = DE + EF$.

9. I en oregelbunden tetraeders sidoytor dragas medianerna (= mittlinjerna). Deras skärningspunkter med varandra i resp. sidoytor tagas till hörn i en ny tetrader. Visa, att de båda tetraedrarnas sidoytor bliva parvis parallella och likformiga, samt bestäm förhållandet mellan tetraedrarnas volymer.

Resultat: **1.** År 1967. **2.** $p^2(12 + 7\sqrt{3})$. **3.** 104°,48 och 46°,56; $\sqrt{21{,}6} = 4{,}648$ dm². **4.** $\frac{\pi r^3}{6}(3 + \sqrt{5})$. **5.** $(2;\ 3\frac{1}{3})$ och $(-2;\ -3\frac{1}{3})$. **6.** Orten är parabeln $x^2 = -h\left(y - \frac{a^2}{h}\right)$. Linjen blir styrlinje, om $a^2 = \frac{3h^2}{4}$, då fokus ligger i $\left(0;\ \frac{h}{2}\right)$. **7.** Max.-värdet $= \frac{1}{4}$, då P befinner sig i $(1;\ 1)$; (min. $= 0$, då P i origo). Ytans gränsvärde $= \frac{1}{6}$. **9.** $\frac{1}{27}$.

Uppgifter i fysik.

1. Två lutande plan, av vilka det första är glatt, det andra strävt, bilda 45° resp. 60° vinkel med ett horisontellt bord. Två små kroppar placeras en på vartdera planet på samma höjd över bordet. De börja samtidigt glida utan begynnelsehastighet utför respektive plan och nå samtidigt bordet. Sök friktionskoefficienten för det stråva planet.

2. Balansen i en brevväg består av två raka, jämntjocka, homogena metallstavar AB och BC, som i punkten B hopfogats, så att de bilda rät vinkel med varandra. AB är 10 cm lång och väger 10 gr, BC är 5 cm och väger 5 gr. En vikt på 50 gr är fästad så, att dess tyngdpunkt sammanfaller med punkten A. Balansen kan vrida sig kring en horisontell axel, som går

genom punkten B och är vinkelrät mot AB och BC. I punkten C är medelst en fin kedja upphängd en vågskål. Kedjans och vågskålens sammanlagda vikt är 20 gr. Beräkna den vinkel, som armen AB vrider sig, då i vågskålen placeras en vikt på 10 gr.

3. Vid ett skolförsök, som avsåg mätning av eterångans maximitryck, användes ett i ena änden slutet, jämntjockt glasrör, graderat i mm med nollpunkten vid den slutna änden. Röret fylldes på vanligt sätt med kvicksilver, vändes om och nedsänktes i vertikal ställning i ett kärl med kvicksilver. Den inre kvicksilverytan stannade då vid delstrecket 150, den yttre nådde delstrecket 902. Vid jämförelse med ett samtidigt i kärlet nedsänkt pålitligt barometerrör fann man, att kvicksilvret i detta nådde 12 mm högre upp, vilket visade, att det för mätningen avsedda röret innehöll luft. Därefter infördes underifrån i detta senare rör en droppe eter, fullt tillräcklig för att mätta den ovanför kvicksilvret belägna delen av röret med eterånga. Kvicksilvret sjönk därvid till delstrecket 585, den yttre kvicksilverytan nådde delstrecket 900. Barometerstånd och temperatur, den senare 20° C, voro under försöket konstanta. Beräkna eterångans maximitryck vid ifrågavarande temperatur och uttryck detta värde i nollgradigt kvicksilver. Intet avseende behöver fästas vid i röret kvarvarande flytande eter, ej heller behöver temperaturkorrektion göras för skalan på röret. Kvicksilvers volymsutvidgningskoefficient är 0,00018.

4. Av ett föremål, som är beläget 180 cm från en tunn, positiv lins med 20 cm brännvidd, erhålles på en skärm en skarp bild. En annan tunn lins placeras omedelbart inpå den förra, så att deras optiska huvudaxlar sammanfalla. Man kan då vid oförändrat läge hos föremålet och linssystemet men efter förflyttning av skärmen på denna senare erhålla en bild, vars lineära storlek är den dubbla mot förut. Angiv tecken och brännvidd hos den nya linsen.

5. Den vertikala springan till ett spektroskops kollimator belyses med solljus. Prismat är borttaget, och i dess ställe är på bordet uppställt ett optiskt gitter med springorna lodräta. De strålar, som lämna kollimatorns lins, äro vinkelräta mot gittrets plan. Spektroskopets kikare, vars optiska huvudaxel är horisontell, är vridbar kring en vertikal axel i gittrets plan. Då kikaren vridits 20°,58 från den ställning, då kikarens optiska huvudaxel är parallell med de mot gittret infallande strålarna, synes C-linjen på kikarens hårkors i första ordningens

spektrum. Beräkna vridningsvinkeln för F-linjen i andra ordningens spektrum. Våglängden för C är $6\,563 \times 10^{-8}$ cm och för F $4\,861 \times 10^{-8}$ cm.

6. I en strömkrets äro i serie inkopplade två fasta motstånd r_1 och r_2, ett variabelt motstånd och en milliampèremeter. Den senares utslag hålles med tillhjälp av det variabla motståndet hela tiden oförändrat. Motståndet r_1 är 5 ohm. En galvanometer med motståndet 150 ohm kopplas med trådar, vilka praktiskt taget sakna motstånd, först parallellt med r_1, sedan parallellt med r_2. Utslagen på galvanometern äro 126, resp. 114 skaldelar. Strömstyrkan genom galvanometern är proportionell mot utslaget. Beräkna motståndet r_2.

7. Huru många kilowattimmar förbrukar ett elektriskt lokomotiv, som på en horisontell bana skall på en sträcka av 500 meter öka hastigheten hos ett tåg med vikten 200 ton från 72 till 90 km/timme? Friktions- och luftmotstånd uppskattas till 1,2% av tågets tyngd. Lokomotivets elektriska verkningsgrad är 90%. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek² och 1 kgm = 9,8 joule.

8. En magnetnåls tyngdpunkt P befinner sig på sammanbindningslinjen mellan polerna, mitt emellan dem. Nålen upphänges i två lika långa, fina, otänjbara trådar, vilkas vikt kan lämnas utan avseende. Trådarna utgå från en gemensam punkt O och äro fästade i var sin av magnetens poler. Avståndet PO är 0,5 cm. Nålen befinner sig i den magnetiska meridianen och inställer sig så, att den bildar en viss vinkel v med horisontalplanet. Avståndet mellan polerna är 10 cm; nålens tyngd är 4 000 dyn. Det jordmagnetiska fältet angriper med kraften 10 dyn i vardera polen. Inklinationen är 70°. Beräkna vinkeln v.

Resultat: **1.** $1 : \sqrt{3}$, **2.** 4°,90. **3.** 444,2 mm. **4.** — 45 cm. **5.** 31°,38. **6.** 4,51 ohm. **7.** 10,6 kWh. **8.** 2°,646.

Realskolexamen H. T. 1933.

Provräkning.

1. Beräkna skillnaden mellan de båda uttrycken:

$$\left(2\tfrac{2}{5} + 1\tfrac{3}{4}\right) \cdot 6\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{5}{9} \text{ och } 2\tfrac{2}{5} + 1\tfrac{3}{4} \cdot 6\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{5}{9}.$$

2. Inkomsterna för två affärsmän, A och B, förhöllo sig ett år till varandra som 5 : 7 och deras utgifter som 3 : 4 respektive. A:s nettobehållning blev 1 850 kr. och B:s 2 950 kr. Beräkna deras inkomster och utgifter.

3. En handlande hade inköpt en vara för ett visst pris. Vid beräkning av försäljningspriset lade han på 20% på inköpspriset. Då han emellertid sålde varan mot kontant betalning, gav han 5% rabatt på det förhöjda priset. Hur många procent på inköpspriset förtjänade han, om han erhöll 786,60 kr. för varan?

4. Lös ekvationen

$$\frac{\frac{1}{5}(x+0{,}6)+1{,}8}{\frac{x^2}{3}-0.12}+\frac{x-1{,}2}{x^2+0{,}36-1{,}2x}=\frac{2}{x+0{,}6}.$$

5. Min klocka drar sig 5 minuter före under en tid av 2 dygn. Klockan ställes rätt måndag middag kl. 12. Påföljande lördag skall jag resa med tåget, som avgår kl. 7,32 f. m. Vilken tid skall min klocka visa i det ögonblick, då jag bör gå hemifrån, om jag vill komma fram till stationen 5 minuter före tågets avgång och vägen dit tar 15 minuter?

6. *ABC* är en likbent rätvinklig triangel, i vilken hypotenusan *BC* är 4 cm. En cirkel, som går igenom *A* och som tangerar *BC* i *B*, uppritas. Hur stor yta har den del av cirkeln, som ligger inom triangeln?

7. En svensk affärsman hade att fordra £ 300 (pund) av en engelsk kund. Denne ville betala i svenskt mynt 90 dagar före förfallodagen efter en kurs av 19,39 kr. per £ och med avdrag av diskonträntа efter $3\frac{1}{2}\%$. Hur många kronor erhöll då fordringsägaren? — Ränteåret räknas i England = 365 dagar.

8. I kvadraten *ABCD*, vars sida är 8 cm, drages *AE* till mittpunkten *E* på *BC* och *BF* till mittpunkten *F* på *CD*. Dessa linjer skära varandra i *G*. Beräkna ytorna av kvadratens delar.

Resultat: **1.** 12,8. **2.** Inkomsterna 7 250 kr. och 10 150 kr., utgifterna 5 400 och 7 200 kr. **3.** 14 % (uppgiften om priset 786,60 kr. överflödig). **4.** $x = 0{,}7$. **5.** kl. 7,24 f. m. **6.** $\pi - 2 = 1{,}14$ cm². **7.** 5 766,80 kr. **8.** 3,2 cm²; 12,8 cm²; 12,8 cm² och 35,2 cm².

Innehållsregister

till

årg. 1—16, utgivna under åren 1917—1933.

I registret anges årgång med kursiv; *12*, 159, 234 betyder: 12:te årg. sidorna 159 och 234. Innehållet är grupperat i nedanstående avdelningar.

A. Uppsatser och avhandlingar.

1. Allmänt innehåll. Personalia.

Matematik.

2. Aritmetik och algebra.
3. Ekvationsteori.
4. Talteori.
5. Serier.
6. Funktionsteori.
7. Sannolikhetsräkning.
8. Geometri.
9. Planimetri.
10. Trigonometri.
11. Analytisk geometri.
12. Rymdgeometri.

Fysik.

13. Metodiska frågor, laborationsinredning, laborationsteknik.
14. Relativitetsteori (materiens byggnad etc. se avd. 32).
15. Fysikens enheter.
16. Statik (elasticitet, diffussion).
17. Dynamik (se även avd. 26).
18. Värmeutvidgning, ångbildning, kalorimetri, värmeledning.
19. Energiprincipen, mekanisk värmeteori, värmemotorer.
20. Vågrörelse. Akustik.
21. Ljusets reflexion och brytning, optiska instrument.
22. Ljusets natur. Strålning av olika slag (radioaktivitet se avd. 32).
23. Elektrostatik. Magnetism, elektromagnetism.
24. Elektricitetsledning i fasta kroppar och gaser (i vätskor se avd. 31). Ohms och Joules lagar. Termoelektricitet.
25. Induktion, elektr. maskiner, växelström, elektr. svängningar, radio.
26. Astronomi, geofysik, meteorologi (geokemi se avd. 32).

Kemi.

27. Metodiska frågor, laborationsinredning, laborationsteknik.
28. Oorganisk kemi.
29. Organisk kemi, biokemi.

30. Atomvikt, molekylvikt, fasregeln, massverkans lag.
31. Valenslära, affinitet, elektrokemi, kolloider, adsorption.
32. Kristallografi, radioaktivitet, atomteori, geokemi, period. systemet.

B. (33) Gradualavhandlingar.

C. Bokanmälningar.

34. Biografier. Minnesskrifter. Historia. Årsböcker. Tidskrifter. Kataloger. Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser.
35. Matematik: Läroböcker m. m. för realskolan.
36. Matematik: Läroböcker för gymnasiet och för tekn. läroverk.
37. Matematik: Större läroböcker, speciallitteratur.
38. Fysik (astronomi): Läroböcker m. m. för realskolan o. gymnasiet.
39. Fysik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.
40. Fysik, astronomi, meteorologi: Populärvetenskaplig litteratur.
41. Kemi. Elementära läroböcker för realskolan, gymnasiet m. fl.
42. Kemi: Större läroböcker, monografier m. m.
43. Kemi, mineralogi, geologi: Populärvetenskaplig litteratur.
44. Teknisk litteratur: Läroböcker, speciallitteratur.

D. Matematiska och fysikaliska problem.

45. Prisuppgifter, lösningar, pristagare.
46. Matematiska och fysikaliska problem givna i studentexamen och provräkningsuppgifter givna i real(skol)examen.
47. Matematiska problem, kronologisk förteckning.
48. Matematiska problem ordnade efter innehåll.
49. Fysikaliska problem ordnade efter innehåll.

A. Uppsatser och avhandlingar.

Sid.

1. *Allmänt innehåll. Personalia.*

Anmälan *1*, 1
Andersson, J. August Sörensen † *11*, 129
Benner, S. Nobelpris i fysik 1932—33: P. A. M. Dirac, W. Heisenberg, E. Schrödinger *16*, 193
Blom, C. E. Enhetliga beteckningar i matematik och fysik ... *10*, 235
Hedström, J. S. Otto Gallander † *10*, 65
— — Minskning i antalet hemskrivningar *9*, 112
— — Elevernas enskilda arbete *13*, 159
Hägg, G. Nobelpris i kemi 1932: I. Langmuir *15*, 193
Hägglund, E. Nobelpris i kemi 1931: Fr. Bergius, C. Bosch ... *14*, 220
Gallander, O. Adolf Meyer † *9*, 1

Josephson, K. Nobelpris i kemi 1929: A. Harden, H. v. Euler *13*, 77
Josephson, O. Latingymnasiets nya matematikkurser *13*, 1
Lönnqvist, C. Föreningen f. matem.-naturvetenskaplig underv. *16*, 226
Meyer, A. Almanacksreform 7, 243
Petrini, H. Realskolebildning på naturvetenskaplig grund *11*, 23
Rudberg, E. Nobelpris i fysik 1928—29: O. W. Richardson, L. V. De Broglie *13*, 69
Starck, G. Jac. Berzelius, 150-årsminnet av hans födelse *13*, 65
— — Nobelpris i fysik o. kemi 1930: C. V. Raman, H. Fischer *14*, 1, 5
Söderborg, B. Om enskilt arbete *14*, 151
Till A. Wimans 65-årsdag *13*, 129
Från 1922 års läraremötes matem.-fysik. sektion *6*, 44
Föreläsningar (matem., fysik o. kemi) för lärarkandidaterna, 1927—33 ..... *12*, 54; *13*, 55; *14*, 46, 179; *15*, 182; *16*, 189
Matem., fysiska o. kemiska föreningar; föredrag h. t. 1933 ... *16*, 235

Matematik.

2. *Aritmetik och algebra.*

Blix, K. En vansklig uppgift *5*, 246
Eneroth, O. Procent- o. ränteräkn. i skolan o. i praktiken *9*, 129, 193
Hermansson, S. Räkning med närmevärden i realskolan *10*, 195
Hössjer, G. Om införandet av logaritmer *15*, 140
Kuylenstierna, N. Om beräkning av logaritmer *16*, 76
Lindhagen, A. Förvandling av allm. bråk till decimalbråk..... *2*, 65
Meyer, A. Multiplikationsbegreppet och dimensionsläran ... *1*, 10, 133
— — Om räkning med approximativa tal *6*, 234
Oldenburg, H. Om införandet av potenser o. logaritmer *12*, 4
Palmø, E. Regningsarters Gyldighedsomraade *4*, 129
Petrini, H. Om beräkning av logaritmer..... 7, 13
— — En lek med siffror *13*, 10
X. Kvadratrotsberäkning genom interpol. i kvadrattabell *6*, 171

3. *Ekvationsteori.*

Josephson, O. Om lösningen av fjärdegradsekvationer..... *2*, 14
Larsson, D. En geometrisk sats, löst med komplexa tal *2*, 18
Nyström, B. Falska rötter och rötter, som komma bort *16*, 1
Petrini, H. Approximationsmetoder till ekvationerna $x^n = \pm a \pm bx$ 7, 219; *8*, 1, 65; *9*, 4
X. Konstr. av rötterna till allm. ekv. av andra graden *4*, 155

4. *Talteori.*

Björnberg, E. Bidrag till läran om tals uppdelning i faktorer *4*, 133

Blix, K. Om tals delbarhet *3*, 65
— — Rekurrenta serier av andra ordningen *6*, 189
— — Talen $\frac{\alpha^\varphi \mp \beta^\varphi}{2}$ och deras relationer *11*, 70, 131, 193
Bodlund, C. Är N primtal eller ej? *4*, 23
— — En not till heltalsteorien *14*, 229
— — Pells ekvation *16*, 10
Bolinder, G. Matem. behandl. av ett tidsfördriv (S:t Peders lek) *13*, 88
Kinnman, C. Om tals delbarhet med 7, 11 eller 13 ..... *10*, 7
Lindborg, G. Om det exakta antalet primtal under ett visst tal *6*, 81
Lindhagen, A. Ett par elem. aritm. funkt. jämte kronologiska tillämpningar *1*, 69
Mebius, C. A. Om hela tals uppdelning i faktorer *11*, 1
— — Summan av de r-lediga summorna av n givna tal *12*, 8
Runquist, Kj. Ett delbarhetskriterium *3*, 15
Schmidt, E. Nya Mersenneska tal *12*, 10
Sörensen, A. Om figurtal- och fakultetserier *7*, 154
Tegnér, H. »Katt och råtta» *14*, 193; *15*, 13
X. Några elementära diofantiska uppgifter *7*, 1

5. *Serier.*

Blix, K. Rekurrenta serier *4*, 69; *6*, 189
Bågman, S. En användning av Bernoulliska tal *8*, 79
Källén, Y. Om aritmetiska serier av högre ordning *12*, 135
Mebius, C. A. Några trigonometriska summationsformler *6*, 125
— — En generalisation av binomialteoremet *7*, 65
Meyer, A. Om seriesummeringar *2*, 129
Petrini, H. Om beräkning av logaritmer *7*, 13
Uhler, A. Om utvecklingen av cot πz i partialbråk etc..... *12*, 1

6. *Funktionsteori.*

Blix, K. Bestämn. av en algebraisk funktions max. o. min. ... *3*, 9
Bågman, S. En användning av Bernoulliska tal *8*, 79
Hagström, K. L. Om isoperimetriska produkters maxima *10*, 1
Mattson, R. Lagtext och funktionslära *10*, 10
Meyer, A. Behandlingen av läran om maxima och minima ... *1*, 147
— — Derivatan av a^x och ${}^a\log x$ *5*, 140
— - Kurvuppritning i andra ringen *7*, 138
— - Om kurvan $y = \varphi[f(x)]$ *8*, 8
Oldenburg, H. Om införandet av potenser och logaritmer ... *12*, 4
Petrini, H. Inledning till integralräkningen *6*, 212
— — Om beräkning av logaritmer *7*, 13
Wigert, S. En aritmetisk fråga *16*, 88

7. *Sannolikhetsräkning.*

Andersson, J. Sannolikhetsräkning i äldre svenska läroböcker *15*, 161
Berggren, B. Några tillämpningar av sannolikhetskalkylen på tennisspelet ... *6*, 72
Blom, C. E. Om kursen i sannolikhetsräkning ... *13*, 203
Göransson, E. Sannolikhetsräkning på empirisk grundval *13*, 193; *14*, 7, 65, 129, 199; *15*, 1, 65, 129; *16*, 166, 203
— — Sannolikhetsräkning i äldre svenska läroböcker ... *15*, 161
Molin, K. Något om toleransberäkning ... *7*, 158
Petrini, H. Sannolikhetsräkning och allmänbildning ... *14*, 77
— — Om sannolikhetsräkning i skolan ... *16*, 84
— — Nålproblemet ... *16*, 176

8. *Geometri.*

Benedicks, C. Enhetlig trådkonstruktion av andragradskurvorna 7, 211
Blom, C. E. En triangels medianer ... *12*, 230
Bolinder, G. Fyrhörningar o. deras inskrivbara bissektrisfyrh. *4*, 193; *5*, 1
Bonnesen, T. Geometriunderv. paa Grundlag af Erfaringen... *4*, 1
Hauge, M. och M-r. Om en vinkels tredelning (fråga o. svar) *4*, 239
Hedström, J. S. Om geometriunderv. i realskolans fjärde klass *3*, 193
— — Om linjalritningen i fjärde klassen ... *10*, 168
Josephson, O. Algebr. metod vid den tidigare geometriunderv. *3*, 129
Källén, Y. Gyllene snittet ... *2*, 204
Meyer, A. Anmärkning till uppsats (Petrini, *8*, 129) ... *8*, 139
Norén, E. Om vinkelns tredelning och kubens fördubbling ... *10*, 68
Olson, Hj. Om geometriundervisningen, mål och metod ... *10*, 12, 72
Petrini, H. Om geometrins grunder enligt Hilbert etc. ... *1*, 197
— — De geometriska axiomen i skolundervisningen ... *2*, 193
— — Det Euklideiska systemet i geometrien ... *8*, 129
— — Om geometriundervisningen i skolan ... *8*, 239
— — Geometri utan vinklar ... *10*, 129
— — Allmänna metoder vid geometriundervisningen ... *12*, 65, 129, 193
— — Nytt bevis för Euklides I: 16 och 17 ... *13*, 230
— — Parallellaxiomet för en yta av ändlig utsträckning ... *15*, 204
Stenvall, A. Den regelbundna 34-hörningen ... *15*, 78
Wahlgren, A. Den regelbundna sjuttonhörningen ... *14*, 22
X. Ett par uppgifter ur cirkelns geometri ... *5*, 65
— En geometrisk användning av de komplexa talen ... *6*, 61
— Om koncykliska punkter ... *11*, 65

9. *Planimetri.*

Beckman, N., Om pytagoreiska trianglar ... *16*, 211
De Brun, F. Generalisering av medianer och bissektriser ... *13*, 132

Edqvist, T. Ett närmevärde för π-talet *16*, 80
Hedström, J. S. Om ration. värden på sidor och diagon. i en pgm. *15*, 26
— — Pytagoreiska tal (tabell)..... *8*, 191
Josephson, O. Ett bevis för ptolemeiska satsen..... *7*, 56
Källén, Y. Gyllene snittet *2*, 204
Larsson, D. En geometrisk sats, löst med komplexa tal *2*, 18
Lenander, V. Om den ptolemeiska satsen *2*, 68
Lindborg, G. En svensk minnesvers för talet π *3*, 179
Lindhagen, A. Något om den pytagoreiska ekvationen *3*, 1
Mebius, C. A. Om heltalsvärden på sidor och diagon. i en pgm. *15*, 200
— — Trianglar, vilkas sidor etc. ha ration. talvärden ... *16*, 173, 224
Nilsson, Hj. Trianglar, där sidornas och ytans mätetal äro hela tal och sidorna bilda aritmetisk serie *5*, 23
Sörensen, A. Några satser rörande fyrhörningar och tetraedrar *6*, 146
Wahlgren, A. Om heltalsvärden på sidor och diagon. i en pgm. *16*, 32
X. Om trianglar med rationella sidor och bissektriser *4*, 147
— Satser i samband med Menelaos' och Cevas transversalsatser *5*, 129

10. *Trigonometri.*

Bågman, S. Trigonometriska formlers härledning *14*, 232
Josephson, O. Ett bevis för ptolemeiska satsen..... *7*, 56
Lindborg, G. Härledn. av tangentteor. o. mollweideska formlerna *3*, 201
Lindhagen, A. Härledning av tangentteoremet *3*, 5
Lindskog, N. En reciprocitet hos trianglar *2*, 1
Mebius, C. A. Några trigonometriska summationsformler *6*, 125
Meyer, A. Lärogång vid trigonometriens studium *4*, 11
Norén, E. En enkel trigonometrisk formel *10*, 140
Nydell, S. Sfäriska trigonometriens grundformler *16*, 222
Petrini, H. Formen på en enkel knut *13*, 104
Pettersson, S. Härledning av några trigonometriska formler *2*, 186
X. Ett maximiproblem *6*, 1

11. *Analytisk geometri.*

Benedicks, C. Enhetlig trådkonstruktion av andragradskurvorna *7*, 211
Bodlund, C. Fotpunktskurvan till en tredjegradskurva *16*, 225
Bågman, S. Den allm. andragradsekv. med två variabler *7*, 129
— — Härledning av diameterns ekvation *9*, 19
Lindborg, G. Koordinattransform. vid den allm. andragradsekv. *3*, 136
Lindskog, N. En reciprocitet hos trianglar *2*, 1
— — Härledning av ekvationerna för tangent och normal med given vinkelkoefficient till en konisk sektion *6*, 8
Petrini, H. Allm. metoder vid geometriundervisningen *12*, 65, 129, 193
Solander, E. Not beträffande den allm. andragradsekvationen *1*, 208

Stenmark, H. Till vilken form hör en under allmän form given andragradskurva? 7, 134
Sörensen, A. Till diskussionen av den allmänna parabelekv. *8*, 17
— — Om fotpunktstrianglar *13*, 221
Wahlgren, A. Potenssatsen för kägelsnitt *16*, 81
X. Ett par uppgifter ur cirkelns geometri *5*, 65

12. *Rymdgeometri.*

Carlsson, L. Stereometriska modeller *12*, 12
Hansson, F. Excentr. o. parameter av en konisk sektion 7, 184
Josephson, O. Några formelhärledningar i stereometrien *5*, 193
Nydell, S. Prismoidformeln *15*, 209
Petrini, H. Förenklad framställning av läran om hörn *10*, 193
Solander, E. Om skärning mellan ett plan och en rät cirkulär cylindrisk eller konisk yta *1*, 3
Svensson, A. Det sneda prismat och pyramiden *6*, 169
Sörensen, A. Några satser rörande fyrhörningar och tetraedrar *6*, 146
— — En användning och generalisering av mediansatsen *6*, 203
— — En enkel tredelning av den räta cirkulära konen *8*, 75
Wahlgren, A. Några uppgifter för linearritningen *11*, 140
X. Några tetraedersatser 7, 76

Fysik.

13. *Metodiska frågor, laboratorieinredning, laborationsteknik.*

De nya fysiska och kemiska institutionerna vid Högre reallärov. på Norrmalm i Stockholm *9*, 151
Berggren, B. Hemmagjorda reostater *12*, 227
Bergholm, C. Kopplingstavla för växelström *15*, 225
Blom, C. E. Beskrivande uppg. i fysik i stud.-examen *11*, 47
Borelius, G. Tekniska Högskolans nya fysikinstitut *14*, 30
Frendel, A. Sätt att hålla gummihinna elastisk *8*, 118
Friman, E. Tvållösning för ytspänningsförsök *3*, 180
Gallander, O. Fysiska lab. vid tekn. lärov. i Örebro *5*, 33
Hedström, J. S. Inköp av fysiska apparater *7*, 57
Heimer, A. Överskådlig elektrisk kopplingstavla *15*, 29
Lemoine, M. Fysiska inst. vid Uppsala seminarium *1*, 177, 246
— — Framst. av projektionsbilder utan kamera *1*, 253
— — Om fysiklaborationernas teknik 2, 174
— — Olyckstillbud med projektionslampa *4*, 236
Ling, C. En tvåfjädervåg för fjärde klassen *5*, 179
Lundberg, J. Deutsches Museum i München *10*, 96
Löwenhamn, E. Kromnickeltråd *13*, 232

Mandal, Hj. En demonstrationsvåg *6*, 166
Odencrants, A. Framst. av projektionsbilder utan kamera ... *1*, 175
Söderborg, B. Äldre o. nyare läroböcker i fysik *9*, 160
Åtskilligt tillhörande denna avdelning återfinnes under rubriken »Kataloger m. m.» (avd. 34).

14. *Relativitetsteori* (materiens byggnad etc. se 32).
Faxén, H. Relativitetsprinciperna *2*, 82
— — Materievågen *13*, 205
Mebius, C. A. Utgångspunkten i Einsteins relativitetsteori *4*, 92
— — Med anl. av Oseens uppsats (*4*, 100) *4*, 186
— — Om ljusets relativa fortplantningshastighet *5*, 154
Oseen, C. W. Om Einsteins speciella relativitetsteori *4*, 100

15. *Fysikens enheter.*
Blom, C. E. Enhetliga beteckningar i matematik och fysik ... *10*, 235
Gallander, O. Absoluta def. på elektriska enheterna *1*, 54
— — Är vikt ett mass- eller kraftbegrepp? *3*, 172
Gallander, O. Om vikt som massbegrepp *4*, 82
— — Enhet för kapacitet o. självinduktion *7*, 252
— — Om CGS-systemets dimensionslära *8*, 30
Ising, G. Enheterna för induktans o. kapacitet *9*, 115
Ohlon, S. E. Genmäle till Gallanders uppsats (*1*, 54) *1*, 107
— — Arbetsbegreppet vid fysikundervisningen *3*, 40
Petrini, H. Om enheterna för kraft och massa *9*, 218
Rudberg, T. Anm. till Petrinis uppsats (*9*, 218) *9*, 220
Tandberg, J. Vad väger 1 kubikdecimeter vatten? *16*, 19
Witt, G. Absoluta def. på elektriska enheterna *1*, 111
Från Fysiska Sällskapet. Om enheterna för vikt och kraft ... *4*, 127
— — — Enheterna för induktans o. kapacitet *8*, 242

16. *Statik (elasticitet, diffusion).*
Aurén, T. E. Best. av luftens spec. vikt *1*, 167
— — Laborationsuppg. till elasticitetsläran *6*, 163
Frendel, A. Ett par skolförsök över diffusion *5*, 182
— — Undersökningar över lösta ämnens diffusion *6*, 40, 152
Hallström, W. Vätskors kompressibilitet o. elasticitet *1*, 170
Ling, C. Demonstration av kraftparallellogrammen *6*, 173
Lundblad, R. Hydrostat. tryckets behandl. vid problemlösning *16*, 90
Meyer, A. Läran om krafters sammansättning *4*, 33
— — Ytspänning och kapillaritet *6*, 214
Rudberg, T. Försök över kraftparallellogrammen *6*, 116
Starck, G. Apparat för sträckningselasticitet *7*, 45
— — Apparat för Pascals princip *8*, 183
Wetterblad, T. Barometrar o. höjdmätare enl. Paulin *13*, 156

17. *Dynamik* (se även avd. 26).

Berggren, B. Apparat för demonstr. av fasdifferenser *12*, 162
Björnsson, E. Anm. till försök med Galileis ränna *3*, 119
Bågman, S. Newtons lag ur Kepplers lagar *7*, 120
Edqvist, T. Små gasblåsors stighastighet i vatten *13*, 19
— — Ett stroboskopiskt försök *12*, 159
Forsström, G. Pendelstudium i första latinringen *4*, 38
Gunneson, F. Apparat för bestämning av *g* *9*, 63
Herlin, E. En ny form för Galilei fallränna *11*, 14
Johansson, C. H. Stora vinkelhast. med rotor utan fast axel *12*, 21
Meyer, A. Likformig rörelse i en cirkel. Plana pendeln. Newtons lag ur Kepplers lagar *6*, 135
Molin, K. Studium av fasdifferens (medelst pendelförsök) *5*, 71
Moll, T. Metod att vid fallförsök registrera vägarna *1*, 150
Nilsson, E. Apparat för Benzenbergs fallförsök *13*, 229
Stenmark, H. Modifikation av »Molls fallapparat» *8*, 54

18. *Värmeutvidgning, ångbildning, kalorimetri, värmeledning.*

Aurén, T. E. Uppvärmningsapp. för kalorimeterförsök *9*, 71
Beckman, B. Mätning av låga temperaturer *3*, 43
Benedicks, C. Varpå beror invarens bristande dilatation? *9*, 33
Eriksson, A. Värmegenomgång hos byggnadskonstruktioner ... *5*, 159
Foghammar, E. Vattenångans maximitryck *8*, 232; *9*, 51
Gallander, O. Lösning av utvidgningsproblem *1*, 164
— — Vattenångans sp. värme (svar på fråga) *2*, 254
— — Best. av temp. på vatten vid dess största täthet *3*, 58
— — »Överkylt» el. »underkylt» vatten (svar på fråga)..... *3*, 59
Gunneson, F. Kalorimeter av massiv koppar *13*, 102; *14*, 163
Ling, C. U. Best. av isens smältvärme *12*, 95
Meyer, A. Defin. av daggpunkten (svar på fråga) *2*, 252
Starck, G. App. för best. av vattnets ångtryck *8*, 185

19. *Energiprincipen, mekanisk värmeteori, värmemotorer.*

Aurén, T. E. Adiabatisk uppvärmning av luft *1*, 169
Beckman, B. Molekylstrålar *16*, 129
Benedicks, C. Innebörden av Le Chatelier-Brauns princip *5*, 197
Bergfelt, A. Hur jag undersökte skolans bensinmotor *15*, 222
Foghammar, E. Värmets mekaniska ekvivalent *9*, 212
Gallander, O. Vattenångas sp. värme (svar på fråga)..... *2*, 254
— — Energien hos spänd fjäder (svar på fråga) *3*, 120
— — Poissons lag (svar på fråga) *4*, 242
— — Elementär behandling av entropibegreppet *9*, 22
Lundberg, J. Tavlor med rörliga delar (ångmaskin etc.) *2*, 231

Meyer, A. Värmeteoriens andra huvudsats *5*, 208
Petrini, H. Värmets mekaniska ekvivalent *11*, 81
— — Den andra huvudsatsen i värmeläran *11*, 209

20. *Vågrörelse. Akustik.*

Beckman, B. Den piezoelekriska kvartsresonatorn *12*, 199
Benner, S. Försök med högfrekvensljudvågor *11*, 97
Berggren, B. Demonstration av fasdifferenser *12*, 162
Björkeson, A. Försök med longitudinell stående vågrörelse ... *12*, 138
Edqvist, T. Till Dopplerska principens metodik *12*, 229
— — Varför sjunga telefontrådarna? *14*, 86
Forsström, G. Best. av en tons svängningstal *11*, 21
Gallander, O. Pianot vid undervisning i akustik *8*, 100
— — Anm. till uppsats om tonskalor (*10*, 43) *10*, 44
Leide, A. Metod att demonstrera vågrörelse *14*, 231
Ling, C. U. App. för transversella o. longitudinella vågor *9*, 55
Meyer, A. Om den Dopplerska principen *8*, 95
Molin, K. Experimentellt studium av fasdifferens *5*, 71
Schultz-Steinheil, C. A. Om den Dopplerska principen *9*, 216
— — Om tonskalor *10*, 43
Söderborg, B. Interfererande vattenvågor *7*, 169
Wetterblad, T. Akustiska interferensförsök *11*, 88

21. *Ljusets reflexion och brytning, optiska instrument.*

Blom, C. E. Linsformeln och dess härledning *1*, 230; *3*, 238
Berggren, B. Best. av en vätskas brytningsexponent *11*, 164
Bergholm, C. Avståndet för tydligt seende *12*, 15
Bågman, S. Minimideviationen vid ett prisma *13*, 228
Bäckström, H. Best. av brännvidden för positiva linser *9*, 202
— — »Camera-obscura»-fenomenets omvändning *12*, 84
— — Projektionsapparaternas verkningssätt *14*, 145
Charlier, C. V. L. Linsformeln *9*, 135
Edqvist, T. Ett stroboskopiskt försök *12*, 159
Forsström, G. Linsformeln *1*, 173; *3*, 237; *4*, 52
— — Formeln för den sfäriska spegeln *2*, 47
— — Om spegel- och linsformlerna *11*, 152, 216
Frendel, A. Ljusets brytning i en plan vattenyta *10*, 154, 205
Gertz, H. Den optiska avbildningens grundformler *16*, 65
Levin, C. A. Spegling mot rörlig planspegel *10*, 220
Lönnqvist, C. En omtvistad figur i optiken *9*, 47
Mebius, C. A. Ljusets brytning i en sfärisk yta *7*, 193
Meyer, A. Minimideviationen vid ett prisma *2*, 20
— — Gör speglar ett rum ljusare? (svar på fråga) *8*, 256

Molin, K. Om ljusets prismatiska avböjning *7*, 20
Odencrants, A. Det stereoskopiska seendets natur *7*, 88
Ringenson, S. Minimideviationen vid ett prisma *7*, 55
Wetterblad, T. Ljusets brytning i gaser *14*, 101

22. *Ljusets natur. Strålning av olika slag*
(Radioaktivitet se avd. 32).

Aurén, T. E. Ultraviolett och ultraröd strålning *12*, 196
— — De fotoelektriska cellerna *14*, 214
Beckman, B. Molekylstrålar *16*, 129
Berggren, B. Best. av ljusets våglängd med gitter *4*, 207
Bergholm, C. Kvartslinsmetoden *16*, 107
Bäckström, H. Nyare ljuskällor för olika ändamål *15*, 229
Devik, O. Temperaturstrålingens energifordeling *15*, 86, 148
Edqvist, T. Glimlampans spektrum *8*, 235
Friman, E. Röntgenspektroskopi *2*, 72
Gunneson, F. Glassorters genomsläppning av ultraviolett ljus *11*, 94
Hernqvist, E. Bestämning av våglängder med gitter *2*, 178
Karlsson, K. G. Newtons ringar som elevlaboration *15*, 227
Meyer, A. Lins och gitter (svar på fråga) *2*, 127
Odencrants, A. Nyare undersökningar av korta våglängder ... *5*, 96
Ohlon, S. E. Kristallers egensvängningar i ultrarött *2*, 216
Söderborg, B. Fresnels spegelförsök 7, 172
— — Interferens i lika tjocka planparall. plattor 7, 175
Wallenquist, Å. Om stjärnornas strålning *16*, 157
Wetterblad, T. Lloyds spegelförsök *11*, 85
Wingårdh, K. A. »Vita»-glasets genomskinlighet f. ultraviol. ljus *11*, 92
— — Våglängdsbestämning med gitter *11*, 232

23. *Elektrostatik. Magnetism, elektromagnetism.*

Blom, C. E. Behandlingen av de elektromagnetiska lagarna ... *3*, 19
Benner, S. Metod att uppnå ytterst höga spänningar *12*, 226
Bäckström, H. Coulombs lag för magnetismen *8*, 109
— — Historiska data om vridspolgalvanometern *10*, 142
Forsström, G. Polvåg för Coulombs lag *15*, 19
Frendel, A. Kraftfältet kring rak ledare *6*, 175
Foghammar, E. Demonstr. av tum- och lillfingerreglerna *10*, 223
Gallander, O. Studiet av elektrostatik på våra gymnasier *1*, 57
— — Bör Coulombs lag behandlas i våra gymnasier? *1*, 153
— — Om undervisningen i elektrostatik *10*, 90
— — Mätning av det magnetiska motståndet *2*, 101
— — Anomalier vid Ohms lag och dess motsvarighet inom magnetismen 7, 227

Ljungdahl, G. Ett jordmagnetiskt störingsområde *2*, 39
Söderborg, B. Magnetfältets energi 7, 111
— — Mätning av magnetiska flödens styrka 7, 116

24. *Elektricitetsledning i fasta kroppar och gaser* (i vätskor se avd. 20). *Ohms och Joules lagar. Termoelektricitet.*

Aurén, T. E. Perrins rör *9*, 69
Beckman, B. Metallers ledningsförmåga vid låga temperaturer *1*, 210
Berggren, B. Försök över luftens jonisering *4*, 47
Berlinde, F. Ohmska lagen i grafisk framställning *2*, 227
Blom, C. E. Glimlampan *6*, 13, 100
Borelius, G. Vad karakteriserar en metall? *13*, 138
Enskog, D. Om modern framställning av Ohms lag *5*, 172
Foghammar, E. Urladdning i förtunnade gaser *9*, 53
Frendel, A. Lab. försök över Peltier- o. Joule-effekten *8*, 104
Gallander, O. Modern framställning av Ohms lag *3*, 82
— — Ang. uppsats av S. Ohlon om Ohms lag *5*, 187
Granqvist, G. Linjeblixten *4*, 104
Gunneson, F. Best. av konstanten i Joules lag *14*, 163
Jönsson, E. Best. av konstanten i Joules lag..... *16*, 106
Hallström, W. Elektronteori för metallisk ledning *2*, 206
Holm, R. Elektricitetsström genom gaser o. genom vakuum... *3*, 88
Lemoine, M. Demonstration av Joules lag (med »doppvärmare») *5*, 114
Meyer, A. Är Ohms lag en experimentell eller rationell lag? *3*, 70
Sievert, R. Jonisationsmätning enligt kondensatorkammare-metoden med tillägg om Radiumhemmets behandlingsteknik *16*, 145
Stolt, H. Den elektriska ljusbågens teori *11*, 203
Svensson, B. Kalibrering av termoelement *16*, 199
Söderborg, B. Ohms andra lag 7, 109
Wetterblad, T. Kirchhoffs andra strömförgreningslag..... *12*, 160
Witt, H. En metod att framställa termostaplar *13*, 225

25. *Induktion, elektriska maskiner, växelström, elektriska svängningar, radio.*

Beckman, B. Kvartsresonatorn *12*, 199
Benner, S. Omsättningsförh. hos förstärkartransformatorer ... *13*, 161
Bergholm, C. Kopplingstavla för växelström *15*, 225
Berlinde, F. Anordning vid studiet av elektr. svängningar ... *1*, 235
Blom, C. E. Induktionsström. Kvantitativa induktionsförsök *3*, 25, 28
— — Glimlampan som voltmeter för växelström *6*, 100
Edqvist, T. Notis om kvicksilverlikriktare *10*, 244
Ericsson, F. Elektronrörens verkningssätt etc. *8*, 193
Frendel, A. Glimlampa som likriktare *10*, 39

Gallander, O. Jouberts skiva *1*, 85
— — Tonfrekvenstelegrafi *9*, 144
Holm, R. Glödelektriska förstärkningsrör *3*, 204; *4*, 41
Lemoine, M. Om likriktare; ett inlägg *10*, 166
Lundberg, J. Rörlig modell av motor *2*, 231
— — Rörliga modeller av trefasgenerator o. -motor 7, 36, 245
Löwenhamn, E. Växelström och elektriska svängningar *10*, 212
Söderborg, B. Ballistiska galvanometern, växelströmmens sinusform 7, 113
Wetterblad, T. Kapacitet och självinduktion *11*, 148; *12*, 76
— — Skolförsök med elektronröret *13*, 83
Zachrisson, E. Rörliga modeller av trefasgenerator o. -motor 7, 181
— — Synkronmaskin, trefassystemet, induktionsmotorn *8*, 169

26. *Astronomi, geofysik, meteorologi* (geokemi se avd. 32).

Aurell, B. Om äldre och nyare kosmogonier *3*, 159
Bågman, S. Newtons lag ur Kepplers lagar 7, 120
Forsström, G. Beräkning av månens massa 7, 17
— — Beräkning av jordens form *8*, 25
Fänge, B. Banan och nedfallspunkten för en kropp som kastas rätt upp från jordens yta med stor hastighet *8*, 85
Granqvist, G. Linjeblixten *4*, 104
— — Variationerna i solarkonstanterna *5*, 216
Koræn, T. Seismologiens mål och medel *2*, 22
— — Meteorol. hjälpmedel vid studiet av de högre luftlagren *4*, 160
Lindblad, B. Mätning av dubbelstjärnor o. stjärndiametrar ... *6*, 221
Ljungdahl, G. Ett jordmagnetiskt störingsområde *2*, 39
Lundahl, C. Uppgifter för enskilt arbete i astronomi *15*, 32, 162
Lönnqvist, C. Tillämpad matem. i skolans astronomikurs *2*, 159
— — Möjligheten av en kall kärna i jordens inre *3*, 141
Meyer, A. Newtons lag ur Kepplers lagar *6*, 140
Stenqvist, D. Om de elektriska jordströmmarna *10*, 24
Svenonius, H. Om avplattningen vid jordens poler *5*, 186
Wallenquist, Å. Om stjärnornas strålning *16*, 157
Ångström, A. Är solens strålning variabel? *5*, 78
— — Solarkonstantens variationer *5*, 145
Östman, C. J. En ny vindmätare *14*, 166

Kemi.

27. *Metodiska frågor, laboratorieinredning, laborationsteknik.*

De nya fysiska och kemiska institutionerna vid Högre reallä-roverket på Norrmalm i Stockholm *9*, 151

Gustaver, B. Evakuering av giftgaser i kemiska laboratorier *9*, 73
— — Sätt att avlägsna Hg-droppar ur golvspringor *15*, 37
— — Den kemiska nomenklaturen *16*, 33
Nordwall, J. F. Empirisk kemiundervisning *12*, 230
Parck, K. Lunds Katedralskolas kemiska institution *12*, 155
Sebelius, H. Efterrinning vid tömning av byretter och pipetter *15*, 219
Starck, G. Automatisk pipett och byrett med två avloppsrör *12*, 34
— — Uppgifter för lab.-övningar och enskilt arbete i kemi *14*, 96, 159

28. *Oorganisk kemi.*

Bäckström, Helmer. Den fotografiska negativprocessen *12*, 143
— — Kvicksilverhalogenidernas elektrolyt. dissociation *13*, 23
— — Det fotografiska omvändningsförfarandet *13*, 147
Frendel, A. Ett riskabelt försök med klor *6*, 169
Gustaver, B. Luftens sammansättning. Ett lab.-försök *11*, 44
Hellström, H. Ett nytt utförande av borsyreprovet *11*, 233
Hällqvist, B. och Starck, G. Luftens syrehalt *16*, 100
Melander, K. Kvantitativ syntes av vatten *9*, 147
— — Apparat för framställning av ozon *9*, 148
Parck, K. Reaktionen mellan koppar och svavel *6*, 115
— — Metoder att bestämma luftens syrehalt *13*, 151
Starck, G. Reaktionen mellan järn och vattenånga *4*, 230
— — Framställning av karborundum *4*, 234
— — Reaktionen mellan soda och kvarts *5*, 108
— — Framställning av salpetersyra *7*, 48
— — Framställning av klor *8*, 46
— — Dissociation av natriumbikarbonat *9*, 75
— — Natriumkulans temperatur *9*, 77
— — Kvantitativ syntes av vatten *8*, 115; *12*, 32
— — Den direkta syntesen av klorväte *15*, 215
— — Framställning av fosforväte *16*, 177
Svenonius, H. Några egenskaper hos fosfor *15*, 40

29. *Organisk kemi, biokemi.*

Gustaver, B. Ett ofarligt försök med nitroglycerin *16*, 178
Hennichs, S. Biokemiska arbetsmetoder och problem ... *12*, 215; *13*, 25
— — Biokemiska försök *13*, 97
Holmberg, K. Löslighet av acetylen i aceton *1*, 186
Josephson, K. Mikrokemiens medel och metoder *11*, 32
Starck, G. Framställning av koloxid *5*, 105
— — Elementaranalys som skolförsök *8*, 50
— — Apparat för att påvisa koldioxid *10*, 46

30. *Atomvikt, molekylvikt, fasregeln, massverkans lag.*

Gustaver, B. Ett experiment till belysning av Avogadros lag *14*, 225

HEDVALL, A. Teorien för alkalimetrisk och acidimetrisk titrering *3*, 222
— — Fasregeln och dess tillämpning vid termisk analys *4*, 209
— — Fasta ämnens reaktionsförmåga *8*, 145
PARCK, K. Molekylvikt enligt luftförträngningsmetoden *12*, 109
STARCK, G. Försök till den teoretiska kemien *1*, 34
— — En modifierad Victor Meyers apparat *5*, 52
— — Molekylviktsbestämning som laborationsförsök *8*, 48
— — Avogadros princip på skolstadiet *10*, 225
— — Praktiska atomvikter 1931 och 1932 ..... *14*, 35 och *15*, 159
— — Ett försök till massverkans lag *16*, 37

31. *Valenslära, affinitet, elektrokemi, kolloider, adsorption.*

AHLSTRÖM, G. Ett försök över elektrolytisk polarisation *12*, 29
ALMKVIST, G. Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur *2*, 48, 105; *3*, 97
BJÖRKESON, A. Ett elektrolysförsök *12*, 86
GUSTAVER, B. Om nyare adsorptionsteorier *6*, 25
— — Försök vid undervisningen i elektrokemi *6*, 159
— — Galvanisk förkromning *16*, 96
HALLSTRÖM, W. Demonstration av ultramikroskopiska partiklar *1*, 88
HAMMARSTEN, O. Apparat för demonstration av osmotiskt tryck *7*, 43
HANSSON, A. Några elektrolysförsök *1*, 222
HOLMBERG, K. Om några satser ur valensläran *1*, 103; *3*, 253
— — Reaktionerna vid elektroderna vid elektrolys..... *5*, 110, 234
STARCK, G. Synpunkter på undervisningen i elektrokemi i skolan *5*, 39
— — Några beräkningar på grundval av Nernsts formel *5*, 236
— — Den elektrolytiska polarisationen *13*, 17
— — Elektrolyters ledningsförmåga, ett lab.-försök *15*, 38

32. *Kristallografi, radioaktivitet, atomteori, geokemi, det periodiska systemet.*

ALSÉN, N. Kristallografien i gymnasiets kemikurs *8*, 35
AMINOFF, G. Några data ur modern geokemisk forskning ... *15*, 97, 156
BOLIN, I. Radioaktiv forskning 1915—16 ..... *1*, 91
GRÖNWALL, K. A. Om kristallografien i skolan *9*, 80
GUNNESON, F. och KHENNET, H. Det periodiska systemet *11*, 223
HALLSTRÖM, W. Materiens byggnad..... *1*, 22
RAMSTEDT, E. Astons undersökn. över grundämnenas masspektra *4*, 176
— — Atomernas sönderspräng̈ning 7, 98
— — Radioaktivitet och modern atomlära på gymnasiet *10*, 101
STARCK, G. Nyare arbeten inom atomteorien 7, 233
— — Atomteoriens tillämpning på kemiska problem *9*, 222
— — Radioaktivitet och jordens historia *11*, 103, 167
— — Nya undersökningar över isotopi *12*, 88

B. Referat av gradualavhandlingar.

Från och med årg. *12* (1928/29) ha i tidskriften införts korta referat av gradualavhandlingar, ventilerade vid svenska universitet och högskolor. Referaten äro — med ett undantag — skrivna av vederbörande författare. Utgivarna ha ansett dessa autoreferat vara av värde för dem som vilja följa utvecklingen inom sina ämnen och ägnade att befordra kontakten med arbetet vid universitet och högskolor, vilket i viss mån återspeglas i dessa avhandlingar. Förff. ha med stor beredvillighet insänt dylika referat.

Arvidsson, G. Wellenlängenmessungen in den höheren Funkenspektren von Blei u. Wismut im äussersten Ultraviolett *15*, 53

Aurell, B. Best. d. Längendifferenz zwischen den astronomisch-geodätischen Zentralen Schwedens und Dänemarks *16*, 232

Benner, S. Über d. Eigenschwingung freier Elektronen etc. ... *14*, 176

Bernton, A. Beitr. z. Kenntnis d. opt. aktiven Thiomilchsäuren *15*, 178

Bäcklin, E. Absolute Wellenlängenbest. d. Röntgenstrahlen ... *12*, 111

Bäckström, Hans. The chain reaction theory of negative catalysis *12*, 45

Bäckström, Helmer. Decimalskattningen vid avläsning av skalor *12*, 44

Ekefors, E. Vakuumfunkspektren von Kalium u. Calcium etc. *15*, 52

Englund, B. Reaktion zwischen, Diolen u. Arsenverbindungen *16*, 55

Friberg, S. Messungen der Refraktion u. Dispersion in gasförmigen Kohlenwasserstoffen *16*, 186

Hallén, E. Elektr. Schwingungen in drahtförmigen Leitern ... *14*, 115

Hedestrand, G. Studien über amphotere Elektrolyte *15*, 180

Heuberger, J. Reaktionskinetische Studien an der spontanen Kohlensäureabspaltung der Nitroessigsäure *12*, 110

Hägg, G. X-ray Studies on the Binary Systems of Iron with Nitrogen, Phosphorus etc. *12*, 243

Jonzon, B. Über d. Gruppen birationaler Transformationen d. ellipt. u. d. hyperellipt. Kurven in sich *13*, 242

Jönsson, E. Absorpt.-mess. im langwelligen Röntgengebiet..... *12*, 45

Kellström, G. Exper. Untersuchungen über Interferenz- und Beugungserscheinungen bei langwelligen Röntgenstrahlen *16*, 187

Kiessling, F. Berechnung einseitig eingespannter Druckstäbe etc. *13*, 242

Knave, E. Über d. Bandenspektren einiger Metallhydride *15*, 179

Larsson, A. Exp. Unters. über d. Dispersion d. Röntgenstrahlen *13*, 48

Lundquist, O. Das K-Röntgenemissionsspektrum d. Schwefels *14*, 240

Martens, E. A research on the spherical dynamical equilibrium-distribution of stars of unequal masses *12*, 47

Nilsson, R. Stud. ü. d. enzymatischen Kohlenhydratabbau ... *14*, 44

Odqvist, F. Randwertaufg. d. Hydrodyn. zäher Flüssigkeiten... *12*, 45

Rudberg, E. Soft X-rays and Secondary Electrons..... *13*, 46
Schalén, C. The Space Distribution of Stars etc. *12*, 172
Sebelius, H. Zur Kenntnis der Laktone etc. *12*, 172
Sjöstedt, C. E. (α, β)-Korrespondenzen auf ellipt. Kurven etc. *13*, 172
Sjöstrand, O. Sur le problème de M. Goursat etc. *13*, 241
Strömberg, R. Adsorptionsmessungen *12*, 44
Thorén, F. Zur Kenntnis der katalytischen Zersetzung von Wasserstoffsuperoxyd mit kolloidalem Platin *14*, 45
Thoræus, R. A Study of the Ionization Method for Measuring the Intensity and Absorption of X-rays etc. *16*, 57
Wallenquist, Å. An attempt to determine photovisual magnitudes etc. *15*, 56
Ölander, A. Studien über Brombernsteinssäure..... *13*, 170

C. Bokanmälningar.

34. *Biografier. Minnesskrifter. Historia. Årsböcker. Tidskrifter. Kataloger. Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser.*

Berg, Fredlig bragd, *14*, 105. Bjerknes, N. H. Abel, *13*, 39. Boman-Wikberg, Läsebok, *12*, 238. Brochmann, Opfinnelser, forskning, fremskritt, *14*, 235. Brodetsky, Newton, *13*, 39. Chalmers tekn. institut 1829/1929, *14*, 105. Grenander, Ur fysikens hist., *12*, 107. Handb. d. Physik, Geschichte d. Physik, *12*, 164. Hubendick, Bragdernas män, *12*, 239. Jahrb. Fortschritte d. Mathem., Revue des public. mathem., *15*, 111. Liv o. materia, Läsebok, *14*, 39. Kosmos, Sv. Fysikersamfundets årsskrift, *11*, 113; *12*, 165; *13*, 162; *14*, 37; *15*, 47; *16*, 52. Matematikerkongressen Oslo 1929, *14*, 104. Naturforskaren, Tidskr. f. ungdom, *15*, 118. Norsk Matem. Foren. Skrifter, *16*, 179. Ramstedt, Curie, *15*, 115. School Science and Mathem., Amerikansk skoltidskr., *6*, 110. Smith, Hist. of mathem., *10*, 113. Stockholms Gasverk 1853—1928, *12*, 237. Söderbaum, Jac. Berzelius, *13*, 65. Dædalus, Tekn. musects årsbok 1932, *15*, 238.

Kalendrar (Alm. f. alla, Sv. Kalendern, Tidens kalender), *12*, 109; *13*, 117; *14*, 240; *15*, 239.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser fr. o. m. läsåret 1922/23: *11*, 243; *12*, 113; *13*, 54; *14*, 46, 180; *15*, 182; *16*, 189.

Översikt av innehållet i följ. tidskrifter: Populär astron. tidskr., Svensk kemisk tidskr., Era, Industritidn. Norden, Radioamatören, L. M. Ericsson Review, Matem. Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matem. Tidsskrift (Oslo), Den Høiere Skole (Oslo), *11*, 183, 241; *12*, 48, 113, 174, 245; *13*, 50, 115, 174, 243; *14*, 47, 180; *15*, 57, 183, 239; *16*, 115, 237.

Beskrivningar av apparater, instrument, tekniska nyheter med ledning av kataloger, broschyrer m. m.: *11*, 185; *12*, 50, 115, 177; *13*, 52, 177, 244; *14*, 182, 241. Ny materiell från P. A. Norstedt & Söner, *11*, 238; *12*, 98; *13*, 112, 239; *14*, 182, 242; *16*, 114.

35. *Matematik: Läroböcker m. m. för realskolan.*

Asperén-Damm, *10*, 171; *12*, 102. Berg-Hagström, *14*, 171. Foghammar, *14*, 106. Hagren, Planim., stereom., exempel, *12*, 40. Hallin-Sundblad, Planim., stereom. ex., *16*, 113. Hedström-Öije, *12*, 101; *13*, 166. Inghe-Jonsson, Ex. för inträdessökande, *13*, 237. Jonsson, *11*, 175. Larson, Geom., *9*, 235. Lindblad, *10*, 48. Lindborg, Rep. probl., *9*, 83. Lohmander, *9*, 83. Olson, Geom., *9*, 235. Rendahl-Wahlström-Frank, *13*, 166. Wetterwik, Realskoluppg., *14*, 169. Ex. för inträdessökande, *13*, 237. Wigforss, Grundlägg. matem. underv., *10*, 49. Winberg, *14*, 106. Wällstedt, *10*, 171. Uddholm, *9*, 83, 246.

36. *Matematik: Läroböcker för gymnasiet och för tekn. läroverk*

Bågman, Stereom., *12*, 166. Collin-Ohlon, Trigon., *13*, 168, Algebra, *13*, 1, 45. Eriksson, S., Matem. f. tekn. lärov., *14*, 108; *15*, 45. Eriksson, G., Sannolikhetsr., *12*, 170. Fog, Opgaver, *14*, 176. Hedström-Rendahl, Algebra, *9*, 251; *13*, 45. Jarl, Rep. ex. i algebra, *13*, 240. Jensen, Prakt. matem., *16*, 48. Jepsen, Trig. *2*, 238. Josephson, Planim. o. likform., *13*, 44. Larson, Geom., *10*, 173, 245. Nydell, Uppg. vid tekn. lärov., *15*, 46. Nyström-Olson, Funktionsl. o. anal. geom., *12*, 100. Olson, Algebra, *11*, 180; *13*, 1, 45. Rydberg-Wahlström, Uppg. latinl., *13*, 106. Sjöstèdt, Geom. uppg., *15*, 232. Tham, Planim., *12*, 169. Zachrisson, Ex. till funktionsl. o. anal. geom., *14*, 176.

37. *Matematik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.*

Anér, Alg. formteori. *4*, 235. Arvesen, Nomografi, *15*, 112. Arvidson, Navigeringstab., *16*, 110. Brodén, Exakt. naturv. 7, 50. Dörrie, Triumph d. Mathem., *16*, 47. Enberg, Sexst. trig. tab., *11*, 182. Hagström, Talens vetenskap, *13*, 38, »De 10 tecknen», *14*, 234. Hjelmslev, Geom. eksperim., *3*, 51, Stereom. konstr., *2*, 238. Landau, Funktionentheorie, *13*, 170. Lietzmann, Grundl. d. Mathem., *11*, 235. Lundsgaard, Regnestocken, *2*, 239. Newton, Naturv. matem. principer, *11*, 173; *15*, 44. Nörlund, Causerier, *6*, 233. Sjöstedt, Proj. geom., *15*, 231. Smith, Hist. of Mathem., *10*, 113. Timerding, Aufgaben z. Proj. Geom., *16*, 229. Wahlgren, Apollonius' böcker, *15*, 167. Wieleitner, Infinitesimalrechnung, *12*, 233.

38. *Fysik (astronomi): Elementära läroböcker m. m. för realskolan o. gymnasiet.*

Bohlin, Gaslagarna, *14*, 239. Bond, Examples in Physics. *15*, 168. Bruun-Devik, Fysikk for middelskoler, *13*, 235. Eriksen og Kofoed,

Fysik f. Gymn., *12*, 38. Eriksson, Fysikex. givna vid tekn. lärov., *15*, 233. Juel-Vollset, Fysikkopgaver, *15*, 234. Hahn-Koch, Schülerübungen, *11*, 241. Hellsten, Fys. f. realsk., *13*, 109. Hjalmar, Fys. f. realsk., *14*, 109. Lemoine, Handl. i exp. underv., *8*, 118. Malmborg, Handl. i exp. underv., *12*, 36, Fys. f. realsk., *13*, 109. Moll-Rudberg, Fysik II, III, *15*, 237; *10*, 174. Nilsson, Lab. i statik, värmel., *11*, 116, Lab. i magn., el.- statik, *13*, 108. Nilsson-Gustafson, Fysik o. slöjd, *11*, 117; Thoræus, Fysikalisk teknik, *11*, 240. Thorup, Fysik og Sløjd, *2*, 180. Astronomi: Läroböcker av Hellsten, Lundahl, Malmborg, Hjalmar, *14*, 174, Nilson, *12*, 240, Rendahl-Söderborg, *15*, 47, Wahlgren, *11*, 181. Moll, Astron. observ., *3*, 52.

39. *Fysik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.*

Bjerknes, Teor. fysikk, *12*, 242. Carell-Edelstam, Nautisk meteorol., *15*, 169. Ekman, Mekanik, *3*, 54. Emelèus, Electr. through gases, *13*, 43. Flint, Wave Mechanics, *13*, 42. Handb. d. Physik, Vorlesungstechnik, *12*, 164. Johnson, Spectra, *13*, 42. Joos, Theor. Physik, *16*, 109. March, Atomphysik, *16*, 110. Mie, Elektr. u. Magn., *1*, 253. Pohl, Elektr., *11*, 237; *13*, 44, Mechan. u. Akustik, *14*, 36. Ratcliffe, Phys. Principles of Wireless, *13*, 43. Volkmann, Linsenoptik, *12*, 97.

40. *Fysik, astronomi, meteorologi: Populärvetenskaplig litteratur.*

Asklöf, Astronomi (i »Kunskap»), *14*, 173. Beckman, Anna, Synligt o. osynl. ljus, *10*, 115, Fysik o. kemi (i »Kunskap»), *14*, 173, Strålar o. strålning, *13*, 234. Bragg, Tingens väsen, *9*, 180. Eddington, Mater. världens väsende, *15*, 43. Haas, Den moderna fysiken, *10*, 115. Holst-Kramers, Bohrs atomteori, *13*, 164. Janssen, Er stjernerne beboet?, *12*, 241. Johansen, Elektr. og Stof, *4*, 118. Klein, Vad vi veta om ljuset, *10*, 115, Einsteins relativ., *16*, 231. Lönnqvist, Jordens skapelse etc. o. Solens öde, *16*, 185. Nordenmark, Stjärnklara kvällar, *12*, 241. Schielderup, Relativitet, *7*, 243. Starck, Materiens struktur, *9*, 102. Sullivan, Kopernikus-Einstein, *14*, 103. Vegard, Materiens byggnad, *9*, 102. Wallén, Meteorologi, *14*, 173, En väderleksrapport, *15*, 51. Wiener Vorträge. Krise u. Neuaufbau, *16*, 228.

41. *Kemi: Elementära läroböcker för realskolan, gymnasiet m. fl.*

Björkstrand-Helgesson, Kemi f. praktiska skolor, *11*, 183. Bohlin, Kemi f. realsk., *11*, 49. Bolin-Gustaver, Kemi f. semin., prakt. skol., *14*, 41, f. gymnasiet, *15*, 172. Böös-Lundberg, Kemi f. gymn., *15*, 170. Gertz-Grönwall, Minerallära, *9*, 242. Harberg, Geologi, *9*, 242. Lundberg, Handl. labor., *15*, 116. Löfman-Pehrson,Räkneuppg. *10*, 54. Moll, Kemi f. gymn. II, *9*, 92. Nordwall, Kemi f. semin., prakt. skol., *12*, 105. Nylén-Wigren, Räkneuppg., *12*, 106. Parck, Handl. labor., *12*, 42, lärob. realsk. *14*, 110. Persson, Lärjungeförsök f. folkskol., *15*, 176.

42. *Kemi: Större läroböcker, monografier m. m.*

Alber, Mikrokemi, *16*, 183. Angel, Elektrokemi, *14*, 112. Autenrieth-Rojahn, Quant. Anal., *14*, 239. Chimie minérale, *16*, 181. Fajans, Radioakt., *4*, 50. Falkenhagen, Elektrolyte, *15*, 238. Hedges, Theor. Chem., *16*, 182. Hofmann, Anorg. Chem., *3*, 174. Medicus, Techn. Analyse, *14*, 240. Noddack, Das Rhenium, *16*, 182. Ramberg, Syra, bas, salt *10*, 55, Rémy, Anorg. Chem., *15*, 237.

43. *Kemi, mineralogi, geologi: Populärvetenskaplig litteratur.*

Aminoff, Ädla stenar, *11*, 183, Meteoriter, *13*, 114. Aminoff o. v. Post, Miner. o. geol., *14*, 173. Bolin, Org. o. oorg. kemi i det prakt. livet, *9*, 97, Levande o. död materia, *13*, 114, Det lev. livets kemi, *14*, 113. Bäckström, Fotografi, *12*, 239. Caldenius-Sandegren, Istiden, *9*, 242. Frick, Boliden, *14*, 172. Gleditsch, Radioakt., *9*, 102. Hulthén, En kolatoms öden, *15*, 114. Pettersson, A., Luften o. klimatet, *12*, 240. Pettersson, H., Atomernas sprängning, *11*, 177. Ramstedt, M. Curie o. radium, *15*, 115. Ramstedt-Gleditsch, Radium, *1*, 189. Sörlin, Jorden o. livet, *9*, 242. Bolin-Gustaver, Kemien o. elektr. *16*, 231. Ang. modern materieforskning se även fysik, avd. 40.

44. *Teknisk litteratur: läroböcker, speciallitteratur.*

Althin, Flygkrönika, *15*, 51. Bohlin, El. tekn. grundbegrepp, *15*, 235. Brandt, Silket, *12*, 108. Burns, Radio, *13*, 37. Christiansen-Karlsson, Järnhantering, *10*, 183. Colbjörnsen, Konstgödsel, *12*, 237. De Geer, Järnet, *15*, 236. Elfman, Mekanik, *16*, 112, Hållfasthetslära, *16*, 183. Göransson, El. teknik, *13*, 107. Hawks, Ungdom. ingenjörsbok, *9*, 108. Herlin, Elektr. till husbehov, *14*, 38. Herrmann, El. teknik, *7*, 53. Kristofferson, Sprängämnen, *12*, 237. Körner, Sveriges el. verk, *12*, 234, El. motorer, *13*, 169. Lemoine, Mikrofon-högtalare, *13*, 236. Lundberg, m. fl., Produktion o. utrikeshand., *16*, 50. Rodhe, Förbränningsmotorer, *9*, 180. Sigfrids, El. teknik, *13*, 106. Sjöberg, Signaler, *12*, 108. Sterner, Svensk industri, *11*, 182. Sörlin, Kautschuk, *12*, 108. Stockholms gasverk, *12*, 237. De tekn. vetenskaperna, *5*, 245; *13*, 234. Uppfinningarnas bok, *10*, 51; *11*, 178; *12*, 41, 238; *15*, 50. »Från Kunskapens fält», *14*, 171; *15*, 51. Elektroteknikens grunder, *15*, 46.

D. Matematiska och fysikaliska problem.

45. *Prisuppgifter, lösningar, pristagare.*

Årg. *1*, 67, 254. Årg. *2*, 62, 118, 181, 240, 244. Årg. *3*, 64, 244. Årg. *4*, 60, 61. Årg. *5*, 64. Årg. *6*, 59, 245. Årg. *7*, 64, 251. Årg. *8*, 63, 244. Årg. *13*, 190. Årg. *14*, 54, 248, Årg. *15*, 189.

46. *Matematiska och fysikaliska uppgifter givna i studentexamen och provräkningsuppgifter givna i real(skol)examen.*

Uppgifternas lydelse jämte resultat ha införts regelbundet fr. o. m.

V. T. 1928	Årg. *11*, 251	V. T. 1931	Årg. *14*, 122
H. T. 1928	» *12*, 123	H. T. 1931	» *14*, 250
V. T. 1929	» *12*, 251	V. T. 1932	» *15*, 123
H. T. 1929	» *13*, 123	H. T. 1932	» *15*, 251
V. T. 1930	» *13*, 251	V. T. 1933	» *16*, 123
H. T. 1930	» *14*, 60	H. T. 1933	» *16*, 239

Kortare notiser om studentuppgifter. Alla utom den sista gälla uppg. på reallinjen:

a. Beskrivande uppgifter givna i studentexamen i fysik V. T. 1910—V. T. 1927: Årg. *11*, 47.
b. V. T. 1917: MEYER, Matem. nr 6 och 9, *1*, 62; BALKE, Matem. nr 9, *1*, 131.
c. H. T. 1918: BÅGMAN, Matem. nr 1, *2*, 185.
d. H. T. 1919: BÅGMAN, Matem. nr 5, *3*, 118; MEYER, Fysik nr 4, *3*, 176, 242; RYDBERG, Fysik nr 7 (generalisation), *4*, 65; SOLANDER, Fysik nr 4, *3*, 240.
e. V. T. 1920: MEYER, Fysik nr 7, *3*, 243.
f. H. T. 1922: BÅGMAN, Matem. nr 1, *6*, 176.
g. V. T. 1929: Om nr 8 å latinl. BLOM, *13*, 250 och NYSTRÖM, *14*, 165.

Matematiska problem.

Problemen utgöras dels av svårare problem, dels av enklare problem (fr. o. m. årg. 9) lämpade för skolstadiet. Till de förra finnas lösningar införda c:a ett halvt år efter uppgiftens publicering; till de senare äro endast *resultat* angivna,

Här nedan följer en översikt av problemen, dels i *kronologisk* följd med uppgift om årgång (kursiv) och sida för vederbörande problemgrupp, dels efter *innehåll* huvudsakligen såsom i RYDBERG-WAHLSTRÖMS studentuppgifter. *Kursiv* i den senare förteckningen anger, att problemet tillhör den *svårare* gruppen.

Ur innehållsförteckningen erhålles således problemets *nummer* och därefter ur den kronologiska *årgång och sida.*

47. *Kronologisk förteckning över de matematiska problemen.*

1— 7— 12, 13— 19, 20— 24	*1*, 64, 130, 190, 255
25— 30, 31— 36, 37— 42, 43— 48	*2*, 58, 123, 187, 247
49— 54, 55— 60, 61— 66, 67— 72	*3*, 60, 121, 180, 244
73— 78, 79— 84, 85— 90, 91— 96	*4*, 53, 120, 188, 243
97—102, 103—108, 109—114, 115—120	*5*, 58, 118, 187, 249
121—126, 127—132, 133—138, 139—144	*6*, 45, 118, 177, 234
145—150, 151—156, 157—162, 163—168	*7*, 58, 123, 186, 245
169—174, 175—180, 181—186, 187—192	*8*, 55, 120, 186, 250
— — , 193—208, 209—220, 221—228	*9*, —, 116, 185, 252
229—237, 238—248, 249—255, 256—264	*10*, 58, 119, 185, 248
265—276, 277—286, 287—296, 287a—296a	*11*, 57, 121, 188, 244
297—306, 307—316, 317—326, 327—336	*12*, 55, 117, 181, 247
337—346, 347—372, 373—394, 395—412	*13*, 56, 118, 179, 245
413—427, 428—448, 448—460, 461—483	*14*, 50, 117, 183, 243
484—512, 513—535, 536—550, 551—574	*15*, 60, 119, 185, 241
575—599, 600—617, 618—632, 633—653	*16*, 60, 117, 190, 239

48. *Matematiska problem ordnade efter innehåll.*

Uppgifter av större svårighetsgrad, till vilka lösningar finnas, äro angivna med *kursivstil.*

I. Talteori: *25, 29, 40, 43, 74, 106, 111, 117, 131, 133, 140, 151, 164, 181, 182, 183, 191, 193, 209,* 226, *238, 241,* 255, *266,* 272, *297, 327, 328, 395,* 409, *484,* 529, 530, *538.*

II. Algebraiska ekvationer och ekvationssystem: *59, 69, 97, 98, 167,* 199, 213, *221, 265,* 270, *290,* 291, *307,* 321, 341, *347,* 351, 352, 357, 358, 359, 399, *413,* 472, 473, 501, 554, 555, 557, 563, *577,* 636—639, 647, 648.

III. Sannolikhetskalkyl: *120, 175,* 455.

IV. Indeterminerade uppgifter: *8, 12, 41, 42, 44, 45, 52, 91, 92, 121, 173, 178, 277, 317, 338,* 344, 368, 369, 370, 371, 372, *373,* 377, 378, 404, *416,* 419, 487, 578.

V. Logaritmer och exponentialekvationer: 214, 232, 243, 281, 292, 331, 379, 380, 382, 425, 498, 522, 603.

VI. Serier: *51, 78, 144, 147, 150, 159,* 273, *287, 329,* 381, 391, 481, 482, 483, 560, 561.

VII. Trigonometriska ekvationer och teorem: *1, 13, 31, 82, 115, 128, 134, 161, 171, 172, 196,* 200, 215, 233, 244, 251, 274, 284, 291 a, 301, 322, 332, *337,* 342, 360, 361, 362, 405, 440, 451, 464, 465, 492, 493, 496, 497, *513,* 521, 523, 582, 583, 584, 604, 613, 650.

VIII. Planimetri: *17, 18, 33, 34, 35, 46, 53, 61, 67, 71, 73, 85, 86, 88, 103, 119, 124, 136, 139, 149, 155, 157, 165, 170, 177, 186,* 203, 216, 217, 223, 234, 235, *250,* 259, 260, 283, 293, *287 a,* 292 a, *298,* 311, 312, 323, 333, 336, 354, 363, 364, 383—387, 390, 392, 400, 401, 417, 420, *431,* 453, 466, 480, 494, 495, 499, 500, 502—504, 508—510, 512, 516—519, 533—535, 539—542, 556, 558, 559, 564—574, 581, 588, 598, 599, 605—609, 614, 615, 621, 622, 640—642, 644—646, 649.

IX. Stereometri: *3, 6, 16, 27, 28, 30, 39, 50, 54, 57, 64, 70, 80, 101, 102, 109, 112, 132, 138, 141, 146, 156, 174, 176, 192, 194,* 201, 202, 218, 219, 224, *231,* 236, 245, 252, *257,* 262, *267,* 285, 293 a, *300,* 302, 313, 314, 325, 345, 356, *375,* 407, 408, *428,* 452, 467—470, 478, 479, *485,* 488—491, 511, *514,* 528, 543—545, *553,* 579, 580, 589, 590, *635,* 652.

X. Funktionslära: *9—11, 15, 26, 37, 58, 60, 62, 65, 66, 68, 75, 76, 79, 93, 94, 100, 105, 108, 116, 122, 145, 152, 153, 163, 185, 190,* 204, 205, 225, *240,* 247, *249,* 252, 261, 271, *279,* 282, *289,* 294 a, 295 a, 304, 305, *308,* 315, 324, 334, *339,* 343, *349,* 353, 365—367, 388, 389, 393, 394, *397,* 406, 410—412, 422, 424, 427, *429,* 432—439, 441, 443, 445—447, 454, 458—460, *463,* 476, 524—527, 547, 549, *552,* 586, 610, 611, 616, *618,* 626—628, 631, 653.

XI. Analytisk geometri.

Räta linjen: *107, 184,* 237, 294, 295, 303, 471, 474, 550, 591, 594, 595, »En gåta», årg. *1,* s. 60 o. 114,

Cirkeln: *126, 160, 188,* 208, *212,* 220, 355, *396,* 418, *448,* 457, 531, 546, 548, 585, 592, 593, 596, *600,* 617, 629, 630.

Ellipsen: *5, 19, 89, 99, 113, 123, 129, 137, 197,* 207, 248, *256, 258, 268, 310, 348,* 402, *415,* 426, 444, *462,* 475, 477, 506, 507, *537,* 587, *601, 602, 633,* 651.

Hyperbeln: *110, 142, 211,* 227, *230,* 253, *290 a, 318,* 335, 403, *430,* 442, *620.*

Parabeln: *49, 63,* 206, *210,* 254, 263, 276, *278,* 286, *288, 340, 374,* 421, 423, *449, 450,* 456, *486,* 532, *575,* 612, 623—625; probl. 3, årg. 9, s. 183.

Kurvor av högre grad (orter): *222, 350, 597.*

XII. Geometri.

Konstruktionsuppgifter: *2, 4, 32, 38, 77, 81, 96, 104, 114, 118, 125, 135, 154, 158, 162, 166, 169, 187, 195, 198,* 228, *229, 239,* 246, 264, *269,* 275, *280,* 296, *288 a,* 296 a, *299,* 306, *309,* 316, *319, 320,* 326, *330,* 346, *376, 398, 461,* 505, *515,* 520, 562, *576, 619, 634,* 643.

Teorem: *7, 14, 36, 55, 56, 72, 87, 90, 95, 127, 130, 148, 189, 242, 289 a, 414,* 448, *536, 551,* 632.

49. *Fysikaliska problem.*

Bland de tidigare årgångarnas (*1—8*) matematiska uppgifter (se avd. 47) förekomma några spridda uppgifter av fysikaliskt innehåll, nämligen: nr 20—24, 47, 48, 83, 84, 168, 179, 180.

I årg. *12—16* finnes en serie fysikuppgifter med särskild numrering:

Nr 1—19 ..... årg. *12*, 59
20—43 ..... » *12*, 184
44—68 ..... » *13*, 59
69—95 ..... » *13*, 184
Nr 96—121 ..... årg. *14*, 187
122—148 ..... » *15*, 245
149—159 ..... » *16*, 120

I. *Statik.*

Kraftparallellogrammen, momentlagen, lutande planet: 69, 70—72 96—98, 107; ex. 20, årg. *1* s. 255. Vätskors tryck: 5—8. Archimedes princip: 1—4, 96, 107. Gasers tryck: 9—13.

II. *Dynamik.*

Fallrörelse, sned kaströrelse: 79—81, 99, 131, 132, 134; ex. 21, årg. *1* s. 255; ex. 168, årg. 7, s. 246. Kraftekvationen, lutande planet: 82—85, 133. Centralrörelse: 92—95, 100, 135; ex. 48, årg. *2* s. 248. Rörelseenergi, effekt: 86—88, 91, 108, 109, 134.

III. *Värmelära.*

Fasta o. flytande kroppars utvidgning: 34—37, 125. Tillståndslagen för gaser: 14—16, 101, 112, 126—129; ex. 179, årg. *8* s. 121. Energiprincipen, spec. värme: 17—19, 102, 130; ex. 24, årg. *1* s. 255; ex. 83, årg. *4* s. 120.

IV. *Optik. Akustik.*

Reflexion, fotometri: 49, 50, 54, 56. Brytning: 44—48, 51—53, 55, 57—62, 104, 105, 122, 124, 155; ex. årg. 7 s. 121. Optiska instrument: 63—67, 123, 153, 154; ex. 23, årg. *1* s. 255. Dispersion, ljusets natur, strålningslagar: 68, 106, 156—159; ex. 22, årg. *1* s. 255; ex. 47, årg. *2* s. 247. *Akustik:* 38—43, 110, 111.

V. *Elektricitetslära och magnetism.*

Elektrostatik, magnetism, el. strömmens magn. verkningar: 73—78, 89—90, 121, 144—149; ex. 84, årg. *4* s. 120. Ohms lagar: 20—25, 103, 113—120, 136, 138—141. Värmeverkningar, effekt: 26—31, 112, 137, 142, 143. Växelström: 150—152. Elektrolys: 32, 33, 115; ex. 180, årg. *8* s. 121.